Matemática Avanzada

Clase Nro. 16

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Fundamentos: Teorema de Cauchy y de Picard para Sistemas de Ec. Diferenciales

- Definiciones. Problema de Cauchy
- Ejemplos
- Construcción de una Serie Formal
- Integral de Cauchy para funciones de n variables complejas
- Teorema de Cauchy. Soluciones Analíticas
- Esquemas Iterativos Teorema de Picard

Funciones Analíticas: Teorema de Cauchy

Definición de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden. Problema de Cauchy

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es un conjunto de n ecuaciones

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(\mathbf{x}, t) \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

Si además imponemos

$$x_j(t_0) = x_{j\,0}$$

decimos que es un problema de valor inicial, PVI, o *problema de Cauchy*
Entonces, un PVI será

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = f_j(\mathbf{x}, t) & j = 1, 2, \ldots n \\ x_j(t_0) = x_{j\,0} \end{cases}$$

Ejemplos

- **Modelo Predador-Presa**: Sea x la cantidad de predadores e y la cantidad de presas la evolución temporal del sistema es modelizada (ecuaciones de Lotka-Volterra). Puede representar vacunas-virus, etc.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(-\alpha + \beta y) & \alpha, \beta \in \mathcal{R} \\ \frac{dy}{dt} = y(\gamma - \delta x) & \gamma, \delta \in \mathcal{R} \end{cases}$$

- **Efecto de marea para un planeta** Las variaciones en el semieje de la órbita y en la excentricidad por efecto de marea producida por una estrella central es

$$\begin{cases} \langle \frac{da}{dt} \rangle = -\frac{4}{3}\frac{n}{a^4}\left[(1 + 23e^2 + 7e^2 D)\right] & \\ \langle \frac{de}{dt} \rangle = -\frac{2}{3}\,\frac{n}{a^5}\,[9 + 7D] & D = D(m, R, r) \end{cases}$$

Construcción de Solución mediante serie formal

Sea $x_j(t)$ una función analítica de t (después entraremos en detalles) entonces, admite una representación en serie de Taylor

$$x_j(t) = x_j(t_0) + \frac{dx_j(t_0)}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2x_j(t_0)}{dt^2}(t - t_0)^2 + \cdots$$

Podemos notar que cada uno de los coeficientes del desarrollo puede ser obtenido a partir del PVI.

- $x_j(t_0) = x_{j\,0}$
- $\frac{dx_j(t_0)}{dt} = f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0)$
- $\frac{d^2x_j(t_0)}{dt^2} = \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0),t_0)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0),t_0)}{\partial x_k}\frac{dx_k(t_0)}{dt} =$
  $\frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0),t_0)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0),t_0)}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}(t_0), t_0)$

Y así sucesivamente. Lo que significa, que el propio PVI nos permite construir la serie de Taylor, aunque el cálculo de coeficientes sea cada vez más engorroso

Ejemplo: Solución a orden $\mathcal{O}(\Delta t^2)$

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(-0.3 + 0.01y), & x(0) = 9 \\ \frac{dy}{dt} = y(0.1 - 0.02x), & y(0) = 40 \end{cases}$$

Tenemos, $x(0) = 9$, $y(0) = 40$. Además reemplazando estos valores en el propio sistema, tendremos $\frac{dx}{dt}(0) = 0.9$ y $\frac{dy}{dt}(0) = -6.8$
Ahora,

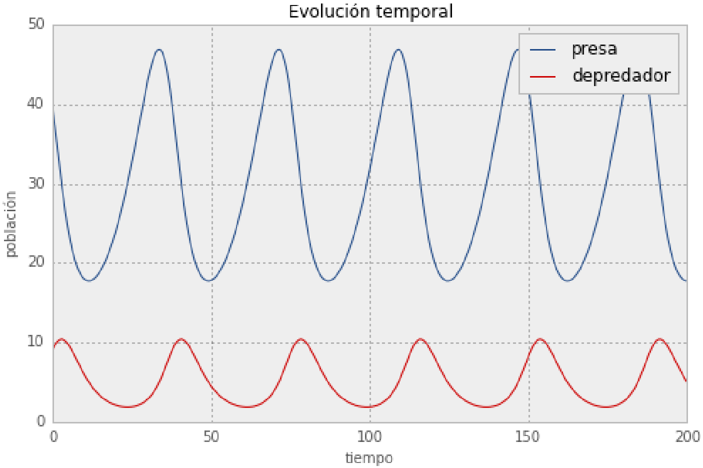
$$\frac{d^2x}{dt} = \frac{dx}{dt}(-0.1 + 0.2\,y) + x\,0.2\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{d^2x}{dt}(0) = -5.13$$

$$\frac{d^2y}{dt} = \frac{dy}{dt}(0.01 - 0.02\,x) - y\,0.02\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d^2y}{dt}(0) = 0.436$$

Entonces, hasta orden 2 tendremos

$$\begin{cases} x(t) = 9 + 0.9\,t - 2.565\,t^2 \\ y(t) = 40 - 6.8\,t - 2.28\,t^2 \end{cases}$$

Gráfico de la solución exacta



Sea $f(z) : U \subset \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Sea $\mathcal{D}$ y $z_0 \in \mathcal{D}$ Entonces la derivada $n-$ésima se calcula a partir de la fórmula de Cauchy

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i}\oint_\gamma \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\, dz$$

Si consideramos una función de n variables $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ tenemos

$$\frac{1}{j_1! j_2! \ldots j_n!}\frac{\partial^{j_1+j_2+\cdots j_n} f}{\partial z_1^{j_1}\partial z_2^{j_2}\ldots \partial z_n^{j_n}}(z_1, z_2, \ldots z_n) = \frac{1}{(2\pi\, i)^n}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\ldots\oint_{\gamma_n}\frac{f(z_1', z_2', \ldots z_n')\ dz_1' dz_2' \ldots dz_n'}{(z_1'-z_1)^{j_1+1}(z_1'-z_2)^{j_2+1}\ldots(z_1'-z_n)^{j_n+1}}$$

donde cada curva está en los planos complejos asociados a cada variable y donde la región se supone

$$\mathcal{D} : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$$

Función Mayorante

Con lo anterior, dado el PVI, supongamos que las funciones $f_j(\mathbf{x}; t)$ vamos a suponer:

- Las funciones f_j son analíticas en el dominio $\mathcal{D}'$ definido por $\mathcal{D}' : |x_j - x_{j\,0}| < r'_j, \quad |t - t_0| < \rho'$ Entonces admiten un desarrollo de Taylor

$$f_j(\mathbf{x}; t) = \sum_{j_t, j_1, j_2, \ldots, j_n = 0}^{\infty} c_{j_t, j_1, j_2, \ldots, j_n} (t - t_0)^{j_t} (x_1 - x_{1\,0})^{j_1} (x_2 - x_{2\,0})^{j_2} \cdots (x_n - x_{n\,0})^{j_n}$$

- Todas las funciones f_j poseen una **misma** función *mayorante*

$$|f_j(\mathbf{x}; t)| < \frac{M}{\left[1 - \frac{(x_1 - x_{1\,0}) + (x_2 - x_{2\,0}) + \cdots + (x_n - x_{n\,0})}{r}\right]\left(1 - \frac{t - t_0}{\rho}\right)}, \qquad M = \max_j\{M_1, M_2, \ldots M_n\}$$

en el conjunto cerrado $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ definido por

$$\mathcal{D} : |x_j - x_{j\,0}| \leq r < \min\{r'_1, r'_2, \ldots, r'_n\}, \quad |t - t_0| \leq \rho < \rho'$$

Sistema Auxiliar y Reducción

A partir de las propiedades de las funciones que definen el PVI, podemos construir un sistema auxiliar

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{M}{\left[1-\frac{(x_1-x_{1\,0})+(x_2-x_{2\,0})+\cdots+(x_n-x_{n\,0})}{r}\right]\left(1-\frac{t-t_0}{\rho}\right)}\\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{M}{\left[1-\frac{(x_1-x_{1\,0})+(x_2-x_{2\,0})+\cdots+(x_n-x_{n\,0})}{r}\right]\left(1-\frac{t-t_0}{\rho}\right)}\\
\vdots &= \vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= \frac{M}{\left[1-\frac{(x_1-x_{1\,0})+(x_2-x_{2\,0})+\cdots+(x_n-x_{n\,0})}{r}\right]\left(1-\frac{t-t_0}{\rho}\right)}
\end{aligned}
$$

Notando que todas las ecuaciones diferenciales son iguales para cada variable, si hacemos el siguiente cambio de variables $\xi = x_1 - x_{1\,0} = x_2 - x_{2\,0} = ... = x_1 - x_{1\,0}$ podemos reducir todo a una sola ecuación

$$
\frac{d\xi}{dt} = \frac{M}{\left(1-\frac{n\xi}{r}\right)\left(1-\frac{t-t_0}{\rho}\right)}, \qquad \xi(t_0) = 0
$$

Teorema de Cauchy

La ecuación auxiliar obtenida

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M}{\left(1 - \frac{n\xi}{r}\right)\left(1 - \frac{t-t_0}{\rho}\right)}, \qquad \xi(t_0) = 0$$

Tiene por solución (de obtención trivial, por variables separabes)

$$\xi(t) = \frac{r}{n}\left[1 - \sqrt{1 + 2M\,n\frac{\rho}{r}\log\left(1 - \frac{t-t_0}{\rho}\right)}\right]$$

Donde el dominio de analiticidad es

$$|t - t_0| \leq \rho\left[1 - e^{\left(-\frac{1}{2M\,n}\frac{r}{\rho}\right)}\right]$$

Es más, si el sistema es autónomo (no depende de t) el dominio será

$$|t - t_0| \leq \frac{r}{2M\,n}$$

Esquemas Iterativos: Teorema de Picard

Esquemas Iterativos

Definición. Un esquema iterativo es un procedimiento secuencial que procura aproximar una determinada cantidad a partir de una repetición de operaciones con la cantidad obtenida en el paso anterior. Este método también es denominado de aproximaciones sucesivas.

Ejemplo: Resolver la ecuación $3x - \cos(x) = 0$. La solución es $x \approx 0.3167513$. Si despejamos de manera *"ingenua"* $x = \frac{\cos(x)}{3}$, y definimos la sucesión $x_0 = 0$, $x_{\ell+1} = \frac{\cos(x_\ell)}{3}$ entonces

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\cos(0)}{3} = 0.3333333 \\
x_2 &= \frac{\cos(0.3333333)}{3} = 0.3149857 \\
x_3 &= \frac{\cos(0.3149857)}{3} = 0.31693360 \\
x_4 &= \frac{\cos(0.31693360)}{3} = 0.31673184 \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Ya x_4 tiene 4 decimales correctos!

En general, un esquema iterativo se puede representar como, dada una aproximación inicial, x_0,

$$x_{\ell+1} = \varphi(x_\ell)$$

Si llamamos α a la solución exacta al problema en cuestión, podemos desarrollar la función de iteración alrededor de α

$$x_{\ell+1} = \varphi(x_\ell) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\xi)\,(x_\ell - \alpha), \qquad \xi \in (\alpha - x_\ell, \alpha + x_\ell)$$

el error en la aproximación ℓ-ésima será $\varepsilon_\ell = x_\ell - \alpha$ y por definición, tendremos, $\alpha = \varphi(\alpha)$

$$\varepsilon_{\ell+1} = \left[\varphi(\alpha) + \varphi'(\xi)\,(x_\ell - \alpha)\right] - \alpha$$

Entonces,tendremos

$$|\varepsilon_{\ell+1}| = |\varphi'(\xi)|\,|x_\ell - \alpha| = |\varphi'(\xi)|\,|\varepsilon_\ell|$$

Sea M una cota uniforme de la derivada de $\varphi'(x)$ podemos escribir

$$|\varepsilon_\ell| \leq M^\ell |\varepsilon_0| \qquad \text{Entonces, si } M < 1 \rightarrow \lim_{\ell\to\infty} \varepsilon_\ell = 0$$

A tener en cuenta...

Dado un esquema iterativo, también denominado *iteración funcional*.

<u>Se debe satisfacer</u>:

- Definir una función de iteración
- Que para x_ℓ pueda calcularse el $x_{\ell+1}$
- Que la sucesión sea convergente
- Que

$$\lim_{\ell \to \infty} |x_\ell - \alpha| = 0$$

  donde α es el valor solución

En general, la función de iteración se obtiene de un *"despeje"* funcional, no en el sentido estricto de despejar para resolver.

Iteración para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx_\ell}{dt} = f_\ell(\mathbf{x}; t), & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_\ell(t_0) = x_{\ell\,0} \end{cases}$$

Un *"despeje"* sería, integrando a ambos miembros

$$x_\ell(t) - x_{\ell\,0} = \int_{t_0}^{t} \frac{dx_\ell}{dt}(t')dt' = \int_{t_0}^{t} f_\ell(\mathbf{x}(t'); t')\, dt'$$

La $x_\ell(t)$ despejada satisface la ecuación diferencial (demostrar esto).
Lo que implica que podemos definir un esquema de iteración funcional

$$\begin{cases} x_\ell^{(0)}(t) = x_{\ell\,0} \\ x_\ell^{(n+1)}(t) = x_{\ell\,0} + \int_{t_0}^{t} f_\ell(\mathbf{x}_\ell^{(n)}(t'); t')\, dt' \end{cases}$$

Teorema de Picard: Caso $n = 1$

Para entender como funciona el esquema iterativo, comencemos con el caso unidimensional
Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden con condición inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $f(x,t) : |x - x_0| \leq a \times |t - t_0| \leq T \to \mathcal{R}$ en principio, continua en la región.
Entonces, el esquema iterativo será

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_{\ell+1}(t) = x_0 \, + \, \int_{t_0}^{t} f(x_\ell(t'), t') \, dt' \end{cases}$$

Un Ejemplo para ver como funciona

A modo de ver el funcionamiento del esquema iterativo, analicemos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(t_0) = a \end{cases}$$

El esquema iterativo será,

$$\begin{cases} x_0(t) = a \\ x_{\ell+1}(t) = a + \int_{t_0}^{t} x_\ell(t')\, dt' \end{cases}$$

Entonces, la sucesión es:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= a \\
x_1(t) &= a + \int_{t_0}^{t} x_0(t')\, dt' = a + \int_{t_0}^{t} a\, dt' = a + a\,(t - t_0) \\
x_2(t) &= a + \int_{t_0}^{t} x_1(t')\, dt' = a + \int_{t_0}^{t} [a + a\,(t - t_0)]\, dt' = a + a\,(t - t_0) + a\frac{(t - t_0)^2}{2} \\
x_3(t) &= a + \int_{t_0}^{t} x_2(t')\, dt' = a + \int_{t_0}^{t} \left[a + a\,(t - t_0) + a\frac{(t - t_0)^2}{2}\right] dt' = a\left[1 + (t - t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} + \frac{(t - t_0)^3}{3!}\right] \\
\vdots &= \vdots \\
x_n(t) &= a\sum_{j=0}^{n} \frac{(t - t_0)^n}{n!}, \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = a\, e^{(t - t_0)}
\end{aligned}$$

Sobre la iteración. Continuidad de las funciones iteradas

Hemos visto que un esquema iterativo tiene sentido si la iteración puede efectuarse infinitamente, es decir, no se trunca.
Veamos que todas las funciones iteradas son continuas en el intervalo $|t - t_0| \leq \alpha = \min\{T, \frac{a}{M}\}$, donde M es el máximo de la función f en la región de definición (que como es un intervalo cerrado y acotado, tendrá su máximo absoluto). Veamos: Para la primera función iterada, tendremos

$$|x_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_0(t'), t')| \, dt' \leq M \, |t - t_0| \leq a$$

esto indica que $x_1(t)$ yace sobre el dominio de definición de f, por lo que podemos integrar para obtener la próxima iteración. Además, $x_0 = x_\ell(t_0)$ para todo ℓ, por lo que en particular, si $|t - t_0| < \delta$ entonces

$$|x_1(t) - x_1(0)| < \varepsilon$$

Por inducción probamos que $\forall \ell$, $x_\ell(t)$ es continua en t_0

Condición de Lipschitz

Dada una función $f(x,t)$, decimos que satisface la condición de Lipschitiz si existe una constante positiva L tal que satisface

$$|f(x_2,t) - f(x_1,t)| \leq L\,|x_2 - x_1|$$

Una condición suficiente para que una función sea Lipschitz es que su derivada parcial sea continua, veamos. Si la derivada parcial es continua, podemos escribir

$$|f(x_2,t) - f(x_1,t)| \leq \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,t) \right| dx^* \leq L\,|x_2 - x_1|$$

donde L es una cota para la derivada parcial.

Convergencia de la Sucesión

Asumamos que la función $f(x,t)$ es Lipschitz y calculemos $|x_2(t) - x_1(t)|$

$$x_2(t) - x_1(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(x_1(t'), t') - f(x_0(t'), t') \right] \, dt'$$

Ya habíamos demostrado

$$|x_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_0(t'), t')| \, dt' \leq M \, |t - t_0|$$

Además, como es de Lipschitz, podemos acotar

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_1(t'), t') - f(x_0(t'), t')| \, dt' \leq L \, |x_1(t) - x_0(t)| \leq L \, M \int_{t_0}^{t} |t - t_0| \, dt' = L \, M \, \frac{|t - t_0|^2}{2} \leq M \, L \, \frac{\alpha^2}{2}$$

Análogamente,

$$|x_3(t) - x_2(t)| \leq L \, M^2 \, \frac{|t - t_0|^3}{3!} = \frac{L}{M} \, \frac{(M|t - t_0|)^3}{3!} \leq \frac{M}{L} \, \frac{L^3 \alpha^3}{3!}$$

En general, podemos demostrar por inducción

$$|x_\ell(t) - x_{\ell-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{\left[L|t - t_0| \right]^\ell}{\ell!} \leq \frac{M}{L} \frac{\left[L\alpha \right]^\ell}{\ell!}$$

Límite de la Sucesión

Sea $x(t) = \lim_{\ell \to \infty} x_\ell(t)$ y calculemos $|x(t) - x_\ell(t)|$ Primero notemos que podemos escribir

$$x_\ell(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{\ell} \left[x_j(t) - x_{j-1}(t)\right]$$

y, por definición,

$$x(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \left[x_j(t) - x_{j-1}(t)\right]$$

Entonces, tenemos

$$x(t) - x_\ell(t) = \sum_{j=\ell+1}^{\infty} \left[x_j(t) - x_{j-1}(t)\right]$$

Calculando el valor absoluto,

$$|x(t) - x_\ell(t)| \leq \sum_{j=\ell+1}^{\infty} |x_j(t) - x_{j-1}(t)| \leq \sum_{j=\ell+1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{(L\,\alpha)^j}{j!}$$

Si reescribimos esta sumatoria para que comience con $j = 0$

$$|x(t) - x_\ell(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{(L\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(L\,\alpha)^j}{j!} = \frac{M}{L} \frac{(L\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} e^{L\,\alpha}$$

El Límite de la Sucesión es solución!

Habiendo probado la convergencia, resta probar que la función a la cual converge es justamente solución del PVI

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t')\, dt'$$

como ya comprobamos que $\lim_{\ell\to\infty} x_\ell(t) = x(t)$ sólo falta demostrar que

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(x_\ell(t'), t')\, dt' = \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t')\, dt'$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t')\, dt' - \int_{t_0}^{t} f(x_\ell(t'), t')\, dt' \right| &\leq L \int_{t_0}^{t} |x(t') - x_\ell(t')| dt' \\
&\leq \frac{L}{M} \frac{(M\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} e^{M\,\alpha} \int_{t_0}^{t} dt' \\
&\leq \frac{L}{M} \frac{(M\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} e^{M\,\alpha}\, \alpha
\end{aligned}$$

que tiende a cero cuando ℓ tiende a infinito.

Esto concluye la demostración de la convergencia del Método de Picard.

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A. (1968)
- Goursat, Edouard. *A Cours D'Analyse Mathématique*, Vol. II, Parte I Ed. Gauthier-Villars, (1902)
- Ince, Edward L. Ordinary Differential Equations, Ed. Dover (1956)
- Moulton, Forest R. *Differential Equations*, Ed. Dover (1958)
- Arnol'd, Vladimir I. *Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer Verlag (1962)
- Forsyth, Andrew R. *Theory of Differential Equations*, Vol. II, Parte II Ed. Cambridge Academic Press (1900)