Matemática Avanzada

Clase Nro. 15

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Definiciones Previas y Métodos Elementales de de Resolución de Ecuaciones Diferenciales

- Definiciones
- Ecuaciones de Primer Orden
- Ecuaciones de Segundo Orden con coeficientes constantes

Definiciones Previas

- **Ecuación Diferencial:** Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra a una función (incógnita) y sus derivadas.
- **Solución:** Una función se dice que es solución si al sustituirla en la ecuación diferencial produce una identidad.
- **Ecuación Diferencial Ordinaria:** Cuando la función depende de una sola variable independiente, se dice que la ecuación diferencial es *ordinaria.*
- **Ecuación Diferencial Parcial:** Si la ecuación involucra derivadas parciales de una función incógnita de varias variables, la ecuación diferencial se denomina *ecuación diferencial parcial.*
- **Orden de la Ecuación Diferencial:** El *orden* de la ecuación diferencial está asociado a la mayor derivada que aparece en la ecuación.
- **Grado de la Ecuación Diferencial Ordinaria:** El grado de una ecuación diferencial es la mayor potencia con la que aparece tanto la función incógnita como sus derivadas.

Ecuaciones de 1er Orden

Definición *de Ecuación Separable. Un ecuación diferencial*

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

se denomina <u>*separable*</u> *si puede escribirse como*

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x)\, f_2(t)$$

Casos Particulares

- Si
$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$
de dice que la ecuación es **ecuación autónoma**
- Si
$$\frac{dx}{dt} = g(t)$$
de dice que la ecuación es una **integración trivial**

Variables Separables. Método de Resolución

Dada la ecuación separable,

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x)\, f_2(t)$$

podemos reescribirla como

$$\frac{1}{f_1(x)}\frac{dx}{dt} = f_2(t)$$

Ahora, notemos que

$$\frac{1}{f_1(x)}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[F_1(x(t))\right] \quad \rightarrow \quad F(x(t)) = \int f_2(t)\, dt + C$$

Ahora, como $\frac{1}{f_1(x)} = \frac{d}{dx}\left[F(x)\right]$ entonces, $F(x) = \int \frac{1}{f_1(x)} dx$ con lo que podemos resolver la ecuación

$$\int \frac{1}{f_1(x)} dx = \int f_2(t)\, dt + C \quad \text{resolviendo tenemos} \quad x(t)$$

Resolución *"Non Sancta"*

Dada la ecuación separable, $\frac{dx}{dt} = f_1(x)\, f_2(t)$ si consideramos $\frac{dx}{dt}$ como un cociente (no lo es!) podríamos escribir

$$\frac{1}{f_1(x)}\, dx = f_2(t)\, dt \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{f_1(x)}\, dx = \int f_2(t)\, dt + C \rightarrow x(t)$$

——— 0 ———

Ejemplos Resolver las siguientes ecuaciones separables

- $$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t}$$
- $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad y(4) = -3$$ No siempre es x(t)
- $$\frac{dx}{dt} = x^2 - 4$$ Pérdida de Solución! (conversar)

Ecuación Lineal

Definición. *Decimos que la ecuación es lineal si la podemos escribir como*

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t)$$

- Caso homogéneo: $b(t) = 0$. Es a variable separable y la solución general se puede escribir como $x_h(t) = C\,e^{\int a(t)\,dt}$, $\quad C = Constante$
- Caso no-homogéneo.
  Idea: Aprovechar la solución de la homogénea, pero con C= C(t) :

Entonces, se propone $x(t) = C(t)e^{\int a(t)\,dt}$. Imponiendo que se satisfaga la ecuación diferencial, tenemos que $C(t)$ debe satisfacer

$$C(t) = \int b(t)\,e^{-\int a(t)\,dt} + K$$

lo que implica que la solución es dada como en fórmula!

$$x(t) = \left\{ \int b(t)\,e^{-\int a(t)\,dt} + K \right\} e^{\int a(t)\,dt}$$

Ecuaciones Exactas

Si $\varphi(x,t)$ es diferenciable en un entorno de un punto (x_0,t_0) además $\varphi(x,t)=c$ podemos asumir (si $\frac{\partial\phi}{\partial x}\neq 0$) que define implícitamente x como función de t tenemos

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi(x,t)\right]=0 \qquad \to \qquad \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}=0$$

En términos de la diferencial de la función se puede escribir

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\,dt=0$$

Inversamente, si tenemos una ecuación diferencial escrita en la forma

$$M(x,t)\,dx+N(x,t)\,dt=0$$

Si existe una función $\varphi(x,t)$ tal que

$$M(x,t)=\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}, \qquad N(x,t)=\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$$

entonces, existen curvas integrales

$$\varphi(x,t)=c$$

Ecuaciones Exactas. Condiciones Necesarias y Suficientes

Teorema. *Dada la ecuación diferencial*

$$M(x,t)\,dx + N(x,t)\,dt = 0$$

donde las funciones M, N, ∂M, ∂N son continuas en un determinado dominio simplemente conexo, y además

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial N(x,t)}{\partial x}$$

existe una curva integral definida a través de

$$\varphi(x,t) = c$$

La demostración se basa en las condiciones necesarias para la diferenciabilidad
La construcción de la función $\varphi(x,t)$ se obtiene directamente con la técnica de obtención de función potencial.

Factor Integrante

Para el caso en que la ecuación diferencial

$$M(x,t)\,dx + N(x,t)\,dt = 0$$

no sea exacta, se busca una función $\mu(x,t)$ de manera tal que la ecuación

$$\mu(x,t)\,M(x,t)\,dx + \mu(x,t)\,N(x,t)\,dt = 0$$

lo sea
La función $\mu(x,t)$ es denominada *factor integrante* y se obtiene a partir de imponer la condición

$$\frac{\partial[\mu(x,t)\,M(x,t)]}{\partial t} = \frac{\partial[\mu(x,t)\,N(x,t)]}{\partial x}$$

Si la ecuación no es exacta y proponemos un factor integrante nos encontramos que debe satisfacerse

$$\frac{\partial \mu(x,t)}{\partial x} N(x,t) - \frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t} M(x,t) = \mu(x,t) \left[\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} \right]$$

Ecuación diferencial parcial para $\mu(x,t)$! Estamos peor!

Propuesta: Asumir que $\mu(x,t)$ depende de una sola variable

- $\mu = \mu(x)$ tenemos para μ la ecuación diferencial

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \underbrace{\left[\frac{\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial N(x,t)}{\partial x}}{N(x,t)} \right]}_{\text{debe ser sólo función de } x!!} \mu(x)$$

- $\mu = \mu(t)$ tenemos para μ la ecuación diferencial

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \underbrace{\left[\frac{\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,t)}{\partial t}}{M(x,t)} \right]}_{\text{debe ser sólo función de } t!!} \mu(t)$$

Definición. *Decimos que una función $f(x,t)$ es homogénea de grado n si y sólo si*

$$f(\lambda x, \lambda t) = \lambda^n f(x,t)$$

Definición. *Decimos que una ecuación diferencial*

$$M(x,t)\,dx + N(x,t)\,dt = 0$$

es homogénea de grado n si y sólo si las funciones $M(x,t)$ y $N(x,t)$ lo son

Podemos notar que $x = x \cdot 1$ y $t = x\,\frac{t}{x}$. Si cambiamos la variable $u = \frac{t}{x}$ tendremos que $t = u\,x$ con lo que

$$dt = u\,dx + x\,dt$$

Si la ecuación dif. es homogénea e introducimos el cambio de variables la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{1}{x}\,dx + \frac{N(1,u)}{M(1,u) + u\,N(1,u)}\,du = 0 \quad \text{variables separables}$$

Ecuaciones de 2do Orden

Ecuación Homogénea

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0$$

Para darle un marco de sistemas de ec. diferenciales lineales, podemos definir $y(t) = x'(t)$ con lo que tenemos el sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} x'(t) &= y \\ y'(t) &= -a\,y - b\,x \end{aligned}$$

En términos matriciales,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo que se vio, existen dos soluciones linealmente independientes

Propuesta de soluciones $e^{\alpha\, t}$

De la reescritura de la ec. de segundo orden como un sistema de primer orden, podemos afirmar:

- Posee dos soluciones linealmente independientes
- El Problema de Valor Inicial necesita $x(t_0)$ e $x'(t_0)$

Para la búsqueda de las soluciones, consideremos como *ansatz*: $x(t) = e^{\alpha\, t}$
Reemplazando en la ec. diferencial

$$\left[\alpha^2 + a\,\alpha + b\right]\; e^{\alpha\, t} = 0 \qquad \text{como } e^{\alpha\, t} \neq 0$$

Tenemos la *ecuación característica*

$$\alpha^2 + a\,\alpha + b = 0 \qquad \text{notemos que es la ec. de autovalores de la matriz } \mathbf{A}$$

tendremos los casos:

- Dos soluciones distintas (reales o complejas), α_1 y α_2
- Raíz doble: una única solución en α

Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Si al resolver la ecuación característica tenemos que las raíces son distintas, hemos resuelto el problema y la solución general será

$$x(t) = c_1\, e^{\alpha_1\, t} + c_2\, e^{\alpha_2\, t} = c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t)$$

Para el caso en que a y b sean **reales**, tendremos que

- α_1 y α_2 son reales. Entonces la solución general es

$$x(t) = c_1\, e^{\alpha_1\, t} + c_2\, e^{\alpha_2\, t}$$

- α_1 y α_2 son complejos conjugados $\alpha_1 = \eta + i\,\omega, \quad \alpha_2 = \eta - i\,\omega$ y la solución se puede escribir

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\eta\, t}\left[c_1\, e^{i\omega\, t} + c_2\, e^{-i\omega\, t}\right] \\ &= e^{\eta\, t}\left[(c_1 + c_2)\cos(\omega\, t) + i\,(c_1 - c_2)\sin(\omega\, t)\right] \end{aligned}$$

Caso $\alpha_1 = \alpha_2$

Para el caso en que la ecuación característica admita una raíz doble, apelaremos a la forma de Jordan para la matriz fundamental.
Recordemos que en la base de autovectores generalizados (ver formas de Jordan) la matriz de Jordan se escribe

$$J = \lambda \mathbf{I} + N$$

Para este caso, el autovalor será α (la raíz doble), la matriz es 2×2 y tendremos entonces que la forma de Jordan para la matriz fundamental

$$U = e^{\left[\begin{pmatrix} \alpha t & 0 \\ 0 & \alpha t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \left[\mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Entonces,

$$U = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & t\, e^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \quad \rightarrow x_1(t) = e^{\alpha t} \text{ y } x_2(t) = te^{\alpha t}$$

Problema No Homogéneo: Método de Variación de los Parámetros

Consideremos la ecuación

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = f(t)$$

Notemos que Si $x_h(t)$ es una solución de la ecuación homogénea y $x_p(t)$ es una *solución particular*, tendremos que $x_h(t) + x_p(t)$ es también solución de la ecuación
A partir de esta propiedad -trivial, debido a la linealidad de la ecuación diferencial- es que se propone como solución particular

$$x_p(t) = c_1(t)\,x_1(t) + c_2(t)\,x_2(t)$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las soluciones LI del problema homogéneo.
Cómo obtenemos $c_1(t)$ y $c_2(t)$? Imponiendo que la función propuesta satisfaga la ecuación diferencial

Las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$

A partir de la imposición de que la función propuesta satisfaga la ecuación, obtenemos ecuaciones para $c_1(t)$ y $c_2(t)$. La resolución de las ecuaciones nos brinda las funciones

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\int \frac{x_2(t)\,f(t)}{W}\,dt \\ c_2(t) &= \int \frac{x_1(t)\,f(t)}{W}\,dt \end{aligned}$$

donde

$$W = det\left[\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}\right] = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)$$

que es el Wronskiano ya definido para sistemas de ecuaciones lineales

Función de Green

Reemplazando las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ en la solución particular

$$x_p(t) = c_1(t)\, x_1(t) + c_2(t)\, x_2(t)$$

Tenemos

$$x_p(t) = \left[-\int \frac{x_2(t^*)\, f(t^*)}{W}\, dt^* \right] x_1(t) + \left[\int \frac{x_1(t^*)\, f(t^*)}{W}\, dt \right] x_2(t)$$

$$x_p(t) = \int^t \left[\frac{x_1(t^*)x_2(t) - x_1(t^*)x_2(t)}{x_1(t^*)x_2'(t^*) - x_1'(t^*)x_2(t^*)} \right] f(t^*)\, dt^*$$

Llamando Función de Green (ya volveremos a hablar de esta función)

$$G(t, t^*) = \left[\frac{x_1(t^*)x_2(t) - x_1(t^*)x_2(t)}{x_1(t^*)x_2'(t^*) - x_1'(t^*)x_2(t^*)} \right]$$

Podemos escribir

$$x_p(t) = \int^t G(t, t^*)\, f(t^*)\, dt^*$$

Ejemplos

- Partícula libre: $x''(t) = 0$ (para hacerlo con este abordaje)
- Caída libre: $y''(t) = -g$
- Oscilador Armónico: $x''(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0$
- Oscilador Amortiguado: $x''(t) + b\, x'(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0$
- Oscilador Amortiguado y forzado: $x''(t) + b\, x'(t) + \omega_0^2\, x(t) = f(t)$
- Circuitos Corriente Alterna

$$L \frac{d^2}{dt^2} I + R \frac{d}{dt} I + \frac{1}{C}\, I = \frac{d}{dt} f_{em}(t)$$

con L: autoinductancia, R: Resistencia y C: capacitancia. La $f_{em}(t)$ es el potencial eléctrico suministrado *fuerza electromotriz*

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A. (1968)
- Miloni, O. *Notas de Algebra Lineal. Apuntes de Clase*, http://fcaglp.unlp.edu.ar/ nmaffione/Mat-Ava/pdfs/Apuntes-MA2015.pdf
- Naón, Carlos M.; Rossignoli, Raúl D.; Santangelo, Eve M. *Ecuaciones Diferenciales en Física*. Ed. EDULP, Libros de Cátedra. (2014) http://sedici.unlp.edu.ar (en esta página buscar por autor)
- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, *Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)