Matemática Avanzada

Clase Nro. 14

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Series de Taylor y de Laurent
Teorema de los Residuos

- Serie de Taylor para funciones analíticas
- Singularidades. Series de Laurent
- Polos y Residuos
- Aplicaciones

Series de Taylor

Consideremos una curva cerrada de Jordan γ que encierre a un punto z del dominio de una función analítica, f. Por la Fórmula de la Integral de Cauchy, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} \, dz'$$

Sea z_0 un elemento interior a γ. En virtud del principio de deformación de caminos, consideremos la curva C que es una circunferencia centrada en z_0 cuyo radio sea mayor a $|z - z_0|$, de manera tal de que podamos aplicar la fórmula de la integral de Cauchy. Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z' - z_0| = R} \frac{f(z')}{z' - z} \, dz'$$

Con la introducción de z_0 y la condición que hemos puesto sobre la nueva curva, tenemos:

$$|z - z_0| < |z' - z_0|, \quad \rightarrow \quad \frac{|z - z_0|}{|z' - z_0|} = \rho < 1$$

Obtención de la Serie

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{|z'-z_0|=R}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' = \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{|z'-z_0|=R}\frac{f(z')}{(z'-z_0)-(z-z_0)}\,dz' \\
&= \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{|z'-z_0|=R}\frac{f(z')}{(z'-z_0)\,[1-w]}\,dz'
\end{aligned}
$$

donde llamamos $w = \frac{z-z_0}{z'-z_0}$. Entonces, $|w| = \rho < 1$ Además, de la suma parcial de la serie geométrica, podemos escribir:

$$
\sum_{\ell=0}^{N} w^{\ell} = \frac{1}{1-w} - \frac{w^{N+1}}{1-w}, \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{1-w} = \sum_{\ell=0}^{N} w^{\ell} + \frac{w^{N+1}}{1-w}
$$

Reemplazando en la integral y agrupando, obtenemos

$$
f(z) = \sum_{\ell=0}^{N}\left[\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{|z'-z_0|=R}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{\ell+1}}\,dz'\right](z-z_0)^{\ell} + R_N
$$

Donde el resto

$$
R_N = \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{|z'-z_0|=R}\frac{f(z')}{[(z'-z_0)-(z-z_0)]}\left[\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right]^{N+1}
$$

La expresión última puede ser escrita como

$$f(z)=\sum_{\ell=0}^{N} a_\ell\,(z-z_0)^\ell + R_N, \qquad \text{con} \qquad a_\ell=\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{|z'-z_0|=R}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{\ell+1}}\,dz' \qquad \text{y}$$

$$R_N=\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{|z'-z_0|=R}\frac{f(z')}{[(z'-z_0)-(z-z_0)]}\left[\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right]^{N+1}$$

Si usamos esta relación simple $\frac{1}{|a-b|}\leq\frac{1}{|a|-|b|}$ para $|a|>|b|$ podemos acotar el resto R_N como

$$|R_N|\leq\frac{M}{2\pi}\oint_{|z'-z_0|=R}\frac{1}{|z'-z_0|(1-\rho)}\rho^{N+1}|dz'|=M\,\frac{\rho^{N+1}}{1-\rho}$$

que tiende a cero cuando N tiende a infinito. Entonces, tomano límite, tenemos

$$f(z)=\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell\,(z-z_0)^\ell, \qquad \text{con} \qquad a_\ell=\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\gamma}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{\ell+1}}\,dz'$$

donde podemos usar la curva γ por el principio de deformación de caminos. Esta es la Serie de Taylor. Notemos que

$$a_\ell=\frac{f^{(\ell)}(z_0)}{\ell!}$$

Serie de Laurent

Consideremos ahora un contorno cerrado γ, pero donde la función $f(z)$ tiene un punto z_0 en el que no es analítica.
Es posible definir un contorno cerrado, Γ en el que el punto z_0 sea evitado, y por lo tanto, en una curva que lo evita, tendremos que valdrá la formula de la integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - z}\, dz' = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z}\, dz' - \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{C} \frac{f(z')}{z' - z}\, dz'$$

donde C es una circunferencia de radio r centrada en z_0.
Calculemos ambas integrales. Para la primera, hagamos el mismo procedimiento que hicimos para la serie de Taylor, es decir, sumemos y restemos z_0 en el denominador, donde podremos escribir:

$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{N} a_\ell\, (z - z_0)^\ell + R_N, \qquad \text{con} \qquad a_\ell = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{|z'-z_0|=R} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{\ell+1}}\, dz' \qquad \text{y}$$

$$R_N = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{[(z' - z_0) - (z - z_0)]} \left[\frac{z - z_0}{z' - z_0}\right]^{N+1}$$

Además, como para esta integral tenemos que $|z' - z_0| > |z - z_0|$ si llamamos $\rho = \left|\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right| < 1$ tengremos que $R_N \to 0$ cuando $N \to \infty$

Serie de Laurent. Continuación

Para calcular la segunda integral, debemos tener en cuenta que ahora $|z - z_0| > |z' - z_0|$ con lo cual, $\rho' = \left|\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right| < 1$ Entonces, la segunda integral puede ser escrita como

$$\frac{1}{2\pi\, i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z}\, dz' = \frac{(-1)}{2\pi\, i} \oint_C \frac{f(z')}{(z - z_0)\left[1 - \frac{z'-z_0}{z-z_0}\right]}\, dz'$$

Haciendo un razonamiento análogo, podemos llegar a

$$\frac{1}{2\pi\, i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z}\, dz' = -\sum_{\ell=0}^{N} \left[\frac{1}{2\pi\, i} \oint_C \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{-\ell}}\right] \frac{1}{(z - z_0)^{\ell+1}} + R'_N$$

con

$$R'_N = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_\gamma \frac{f(z')}{[(z' - z_0) - (z - z_0)]} \left[\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right]^{N+1}$$

Acotando, tenemos

$$\left|R'_N\right| \leq \frac{M}{|z - z_0|} \frac{{\rho'}^{N+1}}{1 - \rho'}$$

que tiende a cero, cuando N tiende a infinito

Serie de Laurent. Expresión final

Tenemos entonces, que dada una curva γ que encierra un dominio en el cual la función $f(z)$ tiene un punto z_0 en el que no es analítica, admite un desarrollo en serie del tipo

$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \, (z - z_0)^\ell + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \, \frac{1}{(z - z_0)^\ell}$$

con

$$a_\ell = \frac{1}{2\pi \, i} \oint_\gamma \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{\ell+1}} \, dz', \quad \text{y} \quad b_\ell = \frac{1}{2\pi \, i} \oint_\gamma \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{-\ell+1}} \, dz'$$

Esta expresión es la denominada Serie de Laurent
Notemos que

$$b_1 = \frac{1}{2\pi \, i} \oint_\gamma f(z') \, dz'$$

Este número se llama residuo

Algunas definiciones adicionales. Ceros

Ceros de orden n.

Para f analítica en z_0. Si $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ decimos que f tiene un cero de orden n en z_0.
En este caso, el desarrollo de Taylor será

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell+n}(z - z_0)^{\ell}$$

Parte Principal de una Función.

Dada una función $f(z)$ la cual tiene un punto singular aislado z_0 dentro de un recinto delimitado por una curva cerrada de Jordan, γ, ésta tendrá un desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (z - z_0)^\ell + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \frac{1}{(z - z_0)^\ell}$$

Los términos de potencias negativas en $(z - z_0)$ conforman lo que se denomina parte principal de f en z_0

Esto es, la parte principal será

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \frac{1}{(z - z_0)^\ell}$$

Algunas definiciones adicionales. Polo de Orden m

Polo de Orden m.

Si la parte principal de una función $f(z)$ (desarrollada en serie de Laurent alrededor de z_0) tiene un número finito de términos, es decir, que existirá un

$$b_m \neq 0, \qquad y \qquad b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$$

decimos que el punto singular aislado z_0 es un polo de orden m

Esto es, la serie de Laurent para el caso en que la función tenga un polo de orden m en z_0 será

$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \, (z - z_0)^\ell + \sum_{\ell=1}^{m} b_\ell \, \frac{1}{(z - z_0)^\ell}$$

Un polo de orden $m = 1$ es denominado *polo simple*.

Singularidad Esencial

Si z_0 es un punto singular aislado, y además la parte principal infinitos términos no nulos, decimos que la función $f(z)$ tiene en z_0 una singularidad esencial

Singularidad Evitable

Si z_0 es un punto singular aislado, pero el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 tiene parte principal nula, decimos que la función $f(z)$ tiene en z_0 una singularidad evitable. En efecto, se puede redefinir en z_0 y se transforma en *analítica*.

Ejemplos: $f(z) = \frac{\sin(z-2i)}{z-2i}$ tiene en $z_0 = 2i$ una singularidad evitable, y $g(z) = \frac{\sin(z-2i)}{(z-2i)^3}$ tiene un polo de orden 2 en $z_0 = 2i$

Relación entre ceros y polos

Dadas dos funciones f y g analíticas en z_0, donde $f(z_0) \neq 0$.
Si $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene un polo de orden m en z_0 si y sólo si $g(z)$ tiene un cero de orden m.
En efecto, si $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene un polo de orden m, podemos escribir:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (z-z_0)^\ell + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

Extrayendo como factor $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ podemos escribir

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \left[b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \cdots + b_1 (z-z_0)^{m-1} + \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (z-z_0)^{\ell+m} \right]$$

Lo que está entre corchetes es una serie de términos positivos, por lo que representa una función analítica en z_0. Entonces,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$$

con $\phi(z)$ analítica en z_0

El Teorema de los Residuos

Teorema. De los Residuos.

Si γ es un contorno cerrado y simple, positivamente orientado, dentro del cual y sobre el cual la función $f(z)$ es analítica salvo en los puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_n$, entonces,

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\, i \sum_{j=1}^{n} Res_{z=z_j}\,[f(z)]$$

La demostración se construye definiendo las n curvas que encierran a cada singularidad aislada, z_j y donde cada integral será $2\pi i\, b_1$ para cada b_1 del desarrollo de Laurent alrededor de z_j.