Matemática Avanzada

Clase Nro. 13

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Funciones Analíticas

Transformaciones Conformes. Integración

- Curvas en el plano complejo
- Conservación de orientaciones. Transformaciones Conformes
- Integración en el plano complejo.
- Fórmula de la Integral de Cauchy

Curvas en el plano complejo. Curvas de Jordan

Arco Jordan

Un conjunto de puntos en el plano complejo $z = x + iy$ se dice que forma un arco si

$$z(t) = x(t) + i\,y(t), \qquad a \leq t \leq b$$

con $x(t)$ e $y(t)$ funciones continuas en en intervalo. Esta definición establece una función continua de $[a, b] \to \mathbb{C}$.
Si el arco no se corta a sí mismo (es decir, que no hay dos t_1 y t_2 distintos (y diferentes a a y b) tales que $z(t_1) = z(t_2)$ decimos que es un *arco simple o arco de Jordan.*

Contorno de Jordan o Curva cerrada de Jordan

Dado un arco de Jordan, donde además $z(a) = z(b)$ la curva será cerrada, y por lo tanto se denominará *contorno de Jordan*.

Tangentes a las curvas

Consideremos una arco de Jordan, con parametrización $z(t)$. En un punto $z(t_0)$, podemos definir un desplazamiento

$$z(t_0 + h) - z(t_0) = [x(t_0 + h) - x(t_0)] + i\ [y(t_0 + h) - y(t_0)]$$

Si las funciones $x(t)$ e $y(t)$ además de continuas son derivables, podemos obtener el límite

$$z'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h} = x'(t_0) + i\, y'(t_0)$$

Este número representa en el plano xy un número complejo, que si lo consideramos como un vector y lo colocamos en el punto $z(t_0)$ será un vector tangente a la curva.
Graficar para ver.

Transformación curvas

Consideremos una función $f(z)$. Consideremos una curva en el plano z y analicemos la aplicación de f sobre la curva. Dará como resultado una curva en el plano $w = u + i\,v$
La curva en el plano w vendrá dada por

$$w(t) = f(z(t)), \qquad t \in [a, b]$$

Con lo que

$$w'(t_0) = \frac{df}{dz}(z_0) \cdot z'(t_0)$$

Si llamamos θ al ángulo que forma $z'(t_0)$, Θ al argumento de $\frac{df}{dz}$ y ϕ al ángulo que forma w' con el eje u, tendremos

$$\phi = \Theta + \theta$$

ya que en un producto de complejos, los argumentos se suman.

Conservación de Orientaciones. Transformaciones Conformes

Si consideramos dos curvas en el plano xy, Γ_1 y Γ_2, parametrizadas por las funciones $z_1(t)$ y $z_2(t)$. Si transformamos estas curvas a través de una función analítica $f(z)$ ($\underline{\text{con } f'(z_0) \neq 0}$), tendremos en el plano uv las curvas

$$w_1(t) = f(z_1(t)), \qquad\qquad w_2(t) = f(z_2(t))$$

definiendo los ángulos como antes, tenemos

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \Theta + \theta_1 \\ \phi_2 &= \Theta + \theta_2 \end{aligned}$$

Obviamente Θ es el mismo, ya que es el argumento de la derivada en el punto de intersección de las curvas. Si $f'(z_0) \neq 0$ tendremos que

$$\phi_1 - \phi_2 = \theta_1 - \theta_2 \qquad \text{preserva orientaciones relativas!}$$

Funciones Armónicas Conjugadas

Consideremos una función analítica en un determinado dominio, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
Como es analítica, cumple las condiciones de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Derivando la primera ecuación respecto de x, la segunda respecto de y y sumando, tenemos (como las funciones u y v son diferenciables)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Y lo mismo para $v(x, y)$, en el recinto de analiticidad.

Integrales de Contorno

Consideremos una función $f(z)$ y una curva γ parametrizada como $z(t)$, $t \in [a,b]$.

Definición de integral sobre una curva

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

También se denota:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma [u(x,y) + i\,v(x,y)]\;[dx + i\,dy]$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma u(x,y)dy + v(x,y)dx$$

Integrales de Contornos.

Consideremos una curva cerrada, γ. Si la región encerrada es simplemente conexa, podemos escribir

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \iint_\Sigma \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] dxdy \,+ i \iint_\Sigma \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right] dxdy$$

Si la función es analítica, satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, por lo que cada integral se anula

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Teoremas Importantes

1. **Teorema de Cauchy-Goursat.** *Si una función f es analítica en todos los puntos interiores a un contorno cerrado y simple y sobre los puntos de γ, entonces*

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

2. **Teorema de Morera.** *Si una función es continua en un dominio D y si $\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 0$ para todo contorno cerrado incluido en D, entonces f en analítica en D.*

3. **Principio de Deformación de Caminos.** *Sean γ_1 y γ_2 dos curvas cerradas que encierran un dominio D donde la función f es analítica. Entonces,*

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

Fórmula de la Integral de Cauchy

Si $f(z)$ analítica en el interior de γ, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Para demostrar este resultado es importante notar primero que se cumple:

$$\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi\, i$$

Además, por el principio de deformación de caminos, calcular la integral sobre γ resulta lo mismo que calcular la integral sobre una circunferencia de radio ρ (arbitrario).