Matemática Avanzada

Clase Nro. 11

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Transformada de Fourier
Propiedades y aplicaciones

- Integral de Fourier con Senos y Cosenos
- Funciones Pares e Impares
- Transformada Coseno y Transformada Seno
- Ejemplo y Aplicación al Cálculo de Integrales Impropias

Otro tipo de *salto al continuo*

Otra formulación de la serie de Fourier

Escribamos la serie de Fourier, definida para una función periódica en el intervalo $[-L, L]$

$$f(x) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\cos\left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x)\right]\right\} dt$$

En virtud de la paridad de la función coseno, podemos escribir

$$\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\cos\left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{\ell\,=\,-\infty \\ (\ell\,\neq\,0)}}^{\infty}\cos\left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x)\right]$$

Entonces, podemos escribir:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\left\{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\cos\left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x)\right]\right\} dt$$

Otro tipo de *salto al continuo (continuación)*

A partir de

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\left\{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\cos\left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x)\right]\right\} dt$$

consideremos $\omega = \frac{\pi}{L}\ell$, entonces, $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}\Delta\ell$
De manera análoga a lo hecho para la obtención de la integral de Fourier, y teniendo en cuenta la paridad (con respecto a la variable ω del coseno) podemos llegar a la expresión, tomando el límite al continuo

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\cos[\omega(t-x)]\,dt\right\} d\omega$$

o, asumiendo la convergencia de las integrales impropias

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\cos(\omega t)\,dt\right\}\cos(\omega x)\,d\omega \\ &+ \int_0^\infty \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\sin(\omega t)\,dt\right\}\sin(\omega x)\,d\omega \end{aligned}$$

Funciones Pares e Impares. Transformada Coseno y Transformada Seno de Fourier

En general, llegamos a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t)\, \cos(\omega t)\, dt \right\} \cos(\omega x)\, d\omega \\ &+ \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t)\, \sin(\omega t)\, dt \right\} \sin(\omega x)\, d\omega \end{aligned}$$

Si la **función es par**, la parte correspondiente a la integral de seno se anula, por lo que podemos escribir (usando la paridad)

$$f(x) = \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t)\, \cos(\omega t)\, dt \right\} \cos(\omega x)\, d\omega$$

Si la **función es impar**, la parte correspondiente a la integral de coseno se anula,

$$f(x) = \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t)\, \sin(\omega t)\, dt \right\} \sin(\omega x)\, d\omega$$

Transformada Coseno y Transformada Seno de Fourier

Si la **función es par**

$$f(x) = \int_0^{\infty} F_c(\omega)\, \cos(\omega x)\, d\omega$$

donde define la **Transformada Coseno**

$$F_c(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t)\, \cos(\omega t)\, dt$$

Si la **función es impar**

$$f(x) = \int_0^{\infty} F_s(\omega)\, \sin(\omega x)\, d\omega$$

donde define la **Transformada Seno**

$$F_s(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t)\, \sin(\omega t)\, dt$$

Ejemplo

Hallar la Transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Como la función es par, podemos obtener la transformada coseno, que resulta inmediatamente de calculo directo

$$F_c(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(a\omega)}{\omega}$$

Entonces, en virtud de la Integral de Fourier, podemos escribir

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} \cos(\omega x) \, d\omega = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Aplicación al Cálculo de Integrales Impropias

A partir del ejemplo anterior

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} \cos(\omega x)\, d\omega = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Podemos escribir cambiando adecuadamente las variables

$$\int_0^\infty \frac{2}{\pi} \frac{\sin(a\, x)}{x} \cos(b\, x)\, dx = \begin{cases} 1 & |b| \leq a \\ 0 & |b| > a \end{cases}$$

o bien

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a\, x) \cos(b\, x)}{x}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |b| \leq a \\ 0 & |b| > a \end{cases}$$

Que nos permite obtener, para $a = 1$ y $b = 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Churchill, Ruel, V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)
- Spiegel, Murray. *Fourier Analysis, Schaum's Series*, Ed. Mc Graw Hill (1974)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)