Matemática Avanzada

Clase Nro. 10

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Transformada de Fourier

- Forma Compleja de la Serie de Fourier
- El Salto al Continuo
- Transformada de Fourier
- Propiedades

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Dada la serie de Fourier de una función continua a trozos en el intervalo $[-L, L]$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left\{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt\right\}1 + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{\ell\pi}{L}t\right)dt\right\}\cos\left(\frac{\ell\,\pi}{L}x\right) \\ &+ \left\{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{\ell\pi}{L}t\right)dt\right\}\sin\left(\frac{\ell\,\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

Expresando el coseno y el seno en forma exponencial podemos escribir

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell\, e^{i\frac{\ell\pi}{L}x}$$

con

$$c_\ell = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-i\frac{\ell\pi}{L}t}\, dt$$

El salto al continuo

Asumamos que la función $f(x)$ es tal que existe la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$

Vamos, de manera heurística, a construir la *Transformada de Fourier* extendiendo el intervalo $[-L, L]$ a toda la recta real y pasando de la sumatoria a la integral.

Para este propósito consideremos el paso de las sumas de Riemann a la integral $\sum_\ell f(x_\ell)\, \Delta x_\ell \to \int_a^b f(x)\, dx$.

Para ello, comencemos con la expresión

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \, e^{i \frac{\ell \pi}{L} x} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{c_\ell}{\Delta \ell} \, e^{i \frac{\ell \pi}{L} x} \, \Delta \ell$$

Es más, siempre $\Delta \ell = 1$ ya que así varía en la sumatoria!

El salto al continuo. *continuación*

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \, e^{i\frac{\ell\pi}{L}x} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{c_\ell}{\Delta\ell} \, e^{i\frac{\ell\pi}{L}x} \, \Delta\ell$$

con

$$c_\ell = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) \, e^{-i\frac{\ell\pi}{L}t} \, dt$$

llamemos $\omega = \frac{\pi\,\ell}{L}$. Entonces, ω varía conforme lo hace ℓ, $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}\Delta\ell$ (y como $\Delta\ell = 1 \to \Delta\omega \cdot L = \pi$)

Entonces, usando el cambio de variables

$$f(x) = \sum_{\frac{L}{\pi}\omega=-\infty}^{\infty} \frac{c_\omega}{\Delta\omega} \, e^{i\omega x} \, \Delta\omega = \sum_{\frac{L}{\pi}\omega=-\infty}^{\infty} c_\omega \frac{L}{\pi} \, e^{i\omega x} \, \Delta\omega$$

Como una suma de Riemann, pasamos a la integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\omega)\, L}{\pi} \, e^{i\,\omega\,x} \, d\omega$$

El salto al continuo. *continuación*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\omega)\, L}{\pi}\, e^{i\,\omega\,x}\, d\omega$$

con

$$\frac{c(\omega)\, L}{\pi} = \frac{L}{\pi}\,\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-i\omega\, t}\, dt$$

Lo único que falta es tomar límite para $L \to \infty$ el cual es necesario incluso para pasar de la suma de Riemann a la integral (ya que si $\Delta\,\omega \to 0$ debemos tener $L \to \infty$ para que el producto de siempre π)

Tomando entonces $\lim_{L\to\infty}$ tenemos la **integral de Fourier**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\,\omega\,x}\, d\omega$$

con

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega\, t}\, dt$$

La Transformada de Fourier

A partir de

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\,\omega\, x}\, d\omega$$

la función

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega\, t}\, dt$$

es la llamada **Transformada de Fourier**

Otra formulación es

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\,\omega\, x}\, d\omega$$

la función

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega\, t}\, dt$$

Propiedades de la Transformada de Fourier

Llamando $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$ y $G(\omega)$ a las transf. de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, podemos demostrar las siguientes propiedades:

- **Producto Interno. Identidad de Parseval**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, \overline{G(\omega)}\, d\omega$$

- **Norma.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

- **Convolución.**

$$\mathcal{F}[f * g] = F(\omega)\, G(\omega)$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Churchill, Ruel, V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)
- Spiegel, Murray. *Fourier Analysis, Schaum's Series*, Ed. Mc Graw Hill (1974)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)