Matemática Avanzada

Clase Nro. 1

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

1. Repaso de Espacios Vectoriales

Dado un conjunto V de elementos y un conjunto numérico (que sea cuerpo) K (en general vamos a considerar reales o complejos). Si podemos definir dos operaciones

- $\oplus$ Suma entre elementos de V
- $\cdot$ Producto entre elementos de K y elementos de V

Suma $\oplus$	**Producto** $\cdot$
S1) Ley de Cierre: $\vec{v} \oplus \vec{w} \in V$	P1) Ley de "cierre" $\lambda \cdot \vec{v} \in V$
S2) Asociatividad	P2) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
S3) Conmutatividad	P3) $(\lambda_1 \lambda_2) \cdot \vec{v} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{v})$
S4) Existencia de neutro	P4) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{v} \oplus \lambda_2 \cdot \vec{v}$
S5) Existencia de opuesto	P5) $\lambda \cdot (\vec{v} \oplus \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} \oplus \lambda \cdot \vec{w}$

Si se satisfacen todas las propiedades, la 4-upla $(V, K, \oplus, \cdot)$ se llama **espacio vectorial**

- Muchas veces, identificamos al conjunto V con el espacio, pero en realidad:
  un espacio vectorial es una estructura, no un conjunto
- Los vectores son, entonces, elementos de un espacio vectorial. NO SON FLECHAS!
- Comunmente, lo que llamamos vector, es el elemento $\vec{v}$
- Los elementos del cuerpo, $\lambda \in K$, son los denominados *escalares*.

Observaciones

- $0{\cdot}\vec{v} = \vec{0}$. Pista. $1{\cdot}\vec{v} = (1+0)\vec{v} = \vec{v} \oplus 0{\cdot}\vec{v}$
- $\lambda{\cdot}\vec{0} = \vec{0}$. Pista: $\lambda{\cdot}\vec{v} = \lambda{\cdot}(\vec{v} \oplus \vec{0}) = \lambda{\cdot}\vec{v} \oplus \lambda{\cdot}\vec{0}$
- $(-1){\cdot}\vec{v} = -\vec{v}$. Pista: $0\vec{v} = \vec{0} = (1-1){\cdot}\vec{v} = \vec{v} \oplus (-1){\cdot}\vec{v}$

- $\mathbb{R}^n$ La misma notación implica la suma y el producto usual (regla del paralelogramo)
- $\mathbb{C}^{n\times n}$ La misma notación implica la suma y el producto usual por un número en matrices
- $K = \mathbb{R}^+$, con la suma definida $x \oplus y = xy$, y el producto $\lambda{\cdot}x = x^\lambda$
- $V = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. $K = \mathbb{R}$ y las operaciones suma: $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x',0)$; y el producto $\lambda{\cdot}(x,y) = (\lambda\, x, 0)$

2. Subespacios Vectoriales

Dado el espacio vectorial $(V, K, \oplus, \cdot)$. Sea W un subconjunto de V.

Si la estructura $(W, K, \oplus, \cdot)$ es por su parte un espacio vectorial, entonces decimos que $(W, K, \oplus, \cdot)$ es *un subespacio de* $(V, K, \oplus, \cdot)$.

Teorema:

Sea $W \subset V$. Si $\vec{w_1}$ y $\vec{w_2}$ pertenecen a W y si

- $\lambda \cdot \vec{w_1} \in W$
- $\vec{w_1} \oplus \vec{w_2} \in W$

Entonces, $(W, K, \oplus, \cdot)$ es un subespacio.

Notar que todas las demas propiedades se satisfacen por herencia de las operaciones.

3. Convención de Einstein

La convención de Einstein en un procedimiento mediante el cual a partir de ciertas reglas se puede suprimir el símbolo Σ

Las reglas para suprimir el símbolo de sumatoria son:

- En la sumatoria debe haber dos índices repetidos
- Los índices repetidos deben estar uno arriba y uno abajo

Ejemplo:

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell m}\, x^{\ell} \equiv a_{\ell m}\, x^{\ell}$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} v^{\mu}\, \mathbf{e}_{\mu} \equiv v^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}$$

Definición

Un conjunto de vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ son *linealmente independientes* si

$$\alpha^\mu \, \vec{v_\mu} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \; \alpha^\mu = 0, \forall \mu = 1, 2, \ldots, n$$

Definición

El conjunto $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$ de vectores de V se dice que forma un *sistema de generadores de V* si y sólo si

$$\forall \vec{v} \in V, \text{existen} \;\; \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^m, \text{tales que} \;\; \vec{v} = \alpha^\mu \, \vec{v_\mu}$$

El conjunto de n vectores de V $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ *forman una* ***base*** *si son un sistema de generadores linealmente independientes. Además, la* ***dimensión es n***

Dada un espacio V, de dimensión n. Dada una base para el espacio

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$$

Consideremos un vector $\vec{v} \in V$ podrá escribirse

$$\vec{v} = v^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}$$

Los números v^{μ} se llaman coordenadas

Atención!

Las coordenadas no son las componentes!

Los vectores son invariantes

Los vectores son entes *absolutos*. Lo relativo son las coordenadas.

$$\vec{v} = v^{\mu}\mathbf{e}_{\mu} = v'^{\nu}\mathbf{e}'_{\nu}$$

5. Transformaciones Lineales

Definición

Sean V y W dos espacios vectoriales. Sea $f : V \to W$. Se dice que f es lineal si y sólo si, se cumple

- $f(\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) \oplus f(\vec{v}_2)$
- $f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})$

Definición. Núcleo.

El núcleo de f está definido como
$Nu(f) = \{\vec{v} \in V : \quad f(\vec{v}) = \vec{0}\}$

Definición. Imagen.

La imagen de f está definida como
$Im(f) = \{\vec{w} \in W \text{ tales que } \exists \vec{v} \in V, f(\vec{v}) = \vec{w}\}$

Observaciones

- Para transformaciones lineales, el nulo del dominio está en el núcleo, en otras palabras, $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
- El núcleo de f es un subespacio de V
- La imagen de f es un subespacio de W

Ejemplo. Dada la transformación

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \text{definida por} \quad T(x,y) = (2x, x+y, x-2y)$$

Hallar el núcleo y la imagen de T
Notemos que si un vector de $\mathbb{R}^3$ está en la imagen, entonces es de la forma,

$$(2x, x+y, x-2y) = x\,(2,1,1) + y\,(0,1,-2)$$

Entonces, $\{(2,1,1);(0,1,-2)\}$. Entonces, la dimensión de la imagen es 2.

7. Matriz asociada

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots, \mathbf{e}_n\}$ base de V y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \ldots, \mathbf{e}'_m\}$, base de W Un vector del dominio, $\vec{v}$, se expresa como $\vec{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu$. Al aplicar una transformación lineal tenemos

$$f(\vec{v}) = f(\vec{v}^\mu \mathbf{e}_\mu) = v^\mu f(\mathbf{e}_\mu)$$

Además, $f(\vec{v}) \in W$ entonces $f(\vec{v}) = w^\nu \mathbf{e}'_\nu$ Entonces, podemos escribir

- $f(\mathbf{e}_\mu) = a^\nu_\mu \mathbf{e}'_\nu$
- $f(\vec{v}^\mu \mathbf{e}_\mu) = v^\mu f(\mathbf{e}_\mu) = v^\mu a^\nu_\mu \mathbf{e}'_\nu = w^\nu \mathbf{e}'_\nu$

Entonces

$$\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

8. Cambio de base y cambio de coordenadas

Dado un espacio vectorial V en el cual consideramos dos bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e_1}', \mathbf{e_2}', \ldots, \mathbf{e_n}'\}$. Consideremos una relación entre ambas bases

$$\mathbf{e}'_\mu = \Lambda^\nu_\mu \mathbf{e}_\nu$$

Este cambio de base induce un cambio de coordenadas. En efecto, si $\vec{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu = v'^\nu \mathbf{e}'_\nu$ entonces, reemplazando en el cambio de base tenemos

$$v^\mu \mathbf{e}_\mu = v'^\nu \mathbf{e}'_\nu = v'^\nu \Lambda^\lambda_\nu \mathbf{e}_\lambda$$

Entonces,

$$\left[v^\mu - \Lambda^\mu_\nu v'^\nu\right] \mathbf{e}_\mu = \vec{0} \implies v^\mu = \Lambda^\mu_\nu v'^\nu$$

Entonces,

$$v'^\nu = \left[\Lambda^{-1}\right]^\nu_\mu v^\mu$$