Apuntes de Variable Compleja

I

Series de Laurent

Octavio Miloni

1 Obtención de la Serie de Laurent

Consideremos una función analítica en el anilo

$$\mathcal{D}: \; \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2$$

Sea $z \in \mathcal{D}$. De la misma manera que procedimos para la obtención de la serie de Taylor, en esta sección buscaremos un desarrollo en serie de potencias de $(z - z_0)$ (al estilo de los desarrollos de Taylor) para obtener el valor de la función $f(z)$.

Hemos visto que cuando la función es analítica en el disco $0 \leq |z - z_0| \leq \rho_2$ el desarrollo es

$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (z - z_0)^\ell$$

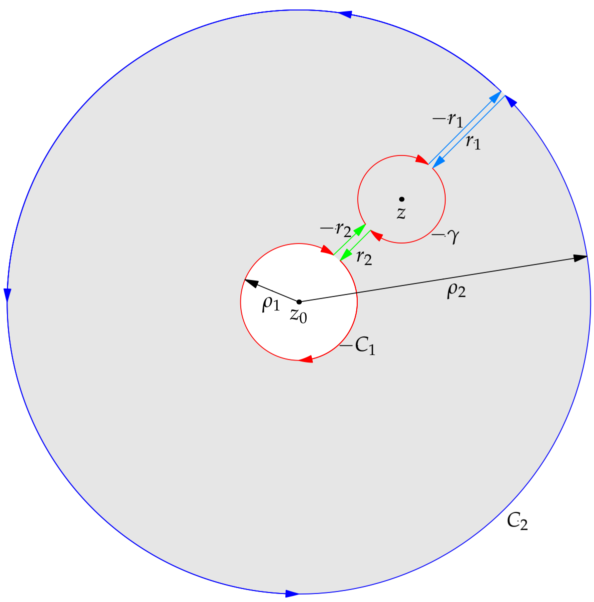
donde

$$a_\ell = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_\gamma \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{\ell+1}} dz' = \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(z_0)$$

Este desarrollo presupone la analiticidad de la función en todo disco que contenga a z_0 (es decir, la función es analítica en z_0).

El caso que analizaremos ahora no posee esta característica, sino que queremos hacer un desarrollo del tipo Taylor, pero alrededor de un punto de no analiticidad, z_0.

Del mismo modo que analizamos casos donde no hay analiticidad, construyamos una curva que encierre una región simplemente conexa en la cual la función sea analítica. Sea $\mathcal{R}$ la región marcada con gris en la siguiente figura, encerrada por la curva
$\Gamma = C_2 + r_1 + (-\gamma) + r_2 + (-C_1) + (-r_2) + (-r_1)$



Sobre esta curva, tendremos

$$\oint_\Gamma \frac{f(z')}{(z' - z)} dz' \;=\; 0$$

Ya que hay dos pares de integrales que se anulan (sobre r_1 y sobre r_2) esta integral puede calcularse como:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z')}{(z'-z)}\,dz' \;= \oint_{C_2} \frac{f(z')}{(z'-z)}\,dz' \;- \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z'-z)}\,dz' \;- \oint_{C_1} \frac{f(z')}{(z'-z)}\,dz' \;= 0$$

Calculemos cada una de las integrales.

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z'-z)}\,dz' \;= 2\pi\, i f(z)$$

ya que dentro de la región encerrada por γ la función es analítica, con lo que podemos aplicar la fórmula de la integral de Cauchy

Para calcular $\oint_{C_2} \frac{f(z')}{(z'-z)}\,dz'$ trabajemos un poco con el denominador. Escribamos el denominador de la siguiente manera

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(z'-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)}$$

Notemos además que $\left|\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right| < 1$, ya que $|z'-z_0| = \rho_2$ sobre la curva C_2 cuyo radio es mayor que $|z-z_0|$ (ver figura)
Por otro lado, recordemos que la suma geométrica

$$\sum_{j=0}^{N} a^j = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

Entonces,

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{j=0}^{N} a^j + \frac{a^{N+1}}{1-a}$$

Podemos escribir, entonces,

$$\frac{1}{(z'-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)} = \sum_{j=0}^{N} \frac{(z-z_0)^j}{(z'-z_0)^{j+1}} + \frac{(z-z_0)^{N+1}}{(z'-z_0)^{N+2}\left(1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)}$$

Entonces, sustituyendo en la integral

$$\oint_{C_2} \frac{f(z')}{(z'-z)}\,dz' = \sum_{j=0}^{N}\left[\oint_{C_2} \frac{f(z')\;\,dz'}{(z'-z_0)^{j+1}}\right](z-z_0)^j + \oint_{C_2} \frac{f(z')}{(z'-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)}\left[\frac{(z-z_0)}{(z'-z_0)}\right]^{N+1} dz'$$

Notemos que la segunda integral tiende a cero cuando N tiende a infinito.
En efecto,

$$\left|\oint_{C_2} \frac{f(z')}{(z'-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)}\left[\frac{(z-z_0)}{(z'-z_0)}\right]^{N+1} dz'\right| < 2\pi M \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\rho}{\rho_2}\right)^{N+1} \frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_2}\right)}$$

donde M es el valor máximo que toma la función sobre la curva, $\rho = |z-z_0|$ ya que $|f(z')| \leq M$, $|dz'| = \rho_2 d\theta$ (para la parametrización $z' - z = \rho_2 e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$)

Entonces, la primera integral toma la forma

$$\oint_{C_2} \frac{f(z')}{(z'-z)}\, dz' = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\oint_{C_2} \frac{f(z')\ \ dz'}{(z'-z_0)^{j+1}} \right] (z-z_0)^j$$

Calculemos ahora $\oint_{C_1} \frac{f(z')}{(z'-z)}\, dz'$. Para el cálculo de esta integral, debemos tener en cuenta que ahora $|z' - z_0| < |z - z_0|$ (ver siempre el gráfico como ayuda) Entonces, en este caso, conviene transformar el integrando de la siguiente manera

$$\frac{f(z')}{(z'-z)} = -\frac{f(z')}{(z-z')} = -\frac{f(z')}{[z - z_0 - (z'-z_0)]} = \frac{f(z')}{(z-z_0)\left(1 - \frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)}$$

Con esta reescritura, podemos trabajar de la misma manera con la que operamos para el cálculo de la integral anterior. En este caso, tendremos

$$\frac{f(z')}{(z'-z)} = -\frac{f(z')}{(z-z_0)} \left[\sum_{j=0}^{N} \left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^j + \left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^{N+1} \frac{1}{1 - \frac{z'-z_0}{z-z_0}} \right]$$

integrando, tenemos

$$\oint_{C_1} \frac{f(z')\ dz'}{(z'-z)} = -\sum_{j=0}^{N} \left[\oint_{C_1} f(z')(z'-z_0)^j\ dz' \right] \frac{1}{(z-z_0)^{j+1}} + \mathcal{R}_N$$

donde

$$\mathcal{R}_N = \oint_{C_2} \frac{f(z')}{(z-z_0)} \left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^{N+1} \frac{1}{1 - \frac{z'-z_0}{z-z_0}} dz'$$

Análogamente, podemos acotar

$$|\mathcal{R}_N| < \ 2\,\pi\, M_2\, \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{N+1} \frac{1}{1 - \frac{\rho_1}{\rho}}$$

donde M_1 es el máximo de la función sobre la curva C_1. Como $\frac{\rho_2}{\rho} < 1$ el límite cuado N tiende a infinito es cero, tenemos que

$$\oint_{C_1} \frac{f(z')\ dz'}{(z'-z)} = -\sum_{j=1}^{\infty} \left[\oint_{C_1} f(z')(z'-z_0)^{j-1}\ dz' \right] \frac{1}{(z-z_0)^j}$$

Una vez calculada las tres integrales, obtenemos

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(z-z_0)^j\ + \sum_{j=1}^{\infty} b_j\, \frac{1}{(z-z_0)^j}$$

con

$$a_j = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{C_2} \frac{f(z')\ \ dz'}{(z'-z_0)^{j+1}}$$

y

$$b_j = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{C_1} f(z')\,(z'-z_0)^{j-1}\, dz' = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{C_1} \frac{f(z')\ dz'}{(z'-z_0)^{-j+1}}$$

Notemos que las integrales que definen a los a_j y b_j son calculadas sobre curvas cerradas que encierran al punto z_0, con lo que por el principio de deformación de caminos, podemos resumir

Serie de Laurent de la función $f(z)$ alrededor de z_0

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(z-z_0)^j \ + \sum_{j=1}^{\infty} b_j\,\frac{1}{(z-z_0)^j}$$

con

$$a_j = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_C \frac{f(z')\ dz'}{(z'-z_0)^{j+1}}$$

y

$$b_j = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_C \frac{f(z')\ dz'}{(z'-z_0)^{-j+1}}$$

donde C es una curva cerrada contenida en el disco de analiticidad y que encierra a z y a z_0. El radio de convergencia será $|z-z_0| \leq \rho_2$