Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

II

Método Iterativo

Teorema de Picard

Octavio Miloni

1 Soluciones por Iteración

Vamos a resolver ecuaciones diferenciales a partir de un esquema iterativo, es decir, por una sucesión de aproximaciones. Antes de desarrollar el método para problemas de valor inicial, será necesario una breve descripción de lo que se entiende por *iteraciones*

1.1 Esquemas Iterativos

Un esquema iterativo es un procedimiento secuencial que procura aproximar una determinada cantidad a partir de una repetición de operaciones con la cantidad obtenida en el paso anterior. Este método también es denominado de *aproximaciones sucesivas*.

1.1.1 Aproximación de raíces

Sólo a modo de ilustrar con un ejemplo un esquema iterativo intentemos resolver la ecuación

$$3x - \cos(x) = 0$$

Esta ecuación admite una solución real (obtenida en www.wolframalpha.com que es una calculadora online) que aproximadas a 7 decimales es $x \approx 0.3167513$

El problema es cómo podría idear un procedimiento que vaya aproximando la solución de la ecuación.

Notemos que podríamos "despejar" la incógnita no como para resolver la ecuación, sino de manera de tipo funcional, por ejemplo,

$$x = \frac{\cos(x)}{3}$$

Con esta relación, podemos general una iteración del tipo:

$$x_{k+1} = \frac{\cos(x_k)}{3}$$

y de esta manera, si fijamos un valor inicial, x_0 podemos ver que ocurre con la secuencia

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\cos(x_0)}{3} \\ x_2 &= \frac{\cos(x_1)}{3} \\ x_3 &= \frac{\cos(x_2)}{3} \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Fijemos, como ejemplo, $x_0 = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\cos(0)}{3} = 0.3333333 \\
x_2 &= \frac{\cos(0.3333333)}{3} = 0.3149857 \\
x_3 &= \frac{\cos(0.3149857)}{3} = 0.31693360 \\
x_4 &= \frac{\cos(0.31693360)}{3} = 0.31673184 \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Podemos notar, que el cuarto elemento de la iteración tiene 4 decimales correctos.

Notemos que el problema general será establecer las condiciones para que la sucesión tenga como límite la solución de la ecuación.

Más allá de las condiciones de convergencia, lo que debemos garantizar es que la iteración pueda realizarse, es decir que no se corte por no poder efectuar las iteraciones. Por ejemplo, si quisiéramos resolver la ecuación

$$x^2 + e^x - 2 = 0$$

podemos notar que al procurar la solución positiva a través de la iteración

$$x_{k+1} = \sqrt{2 - e^{x_k}}$$

comenzar por $x_0 = 0$ tendremos que $x_1 = 1$ y x_2 ya no se puede obtener en los reales. Por eso, las condiciones para que generar las iteraciones son muy importantes.

En general, un esquema iterativo es una secuencia de la forma

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

donde la función $\varphi(x_k)$ es llamada *función de iteración*. Lo que es claro, es que la solución del problema es -en este caso- el valor de x tal que

$$x_{solucion} = \varphi(x_{solucion})$$

esto es, la solución es un punto fijo de la iteración. Es necesario que la iteración

- Se pueda efectuar indefinidamente
- Tenga límite

La primera de las condiciones impone la necesidad de una adecuada elección tanto de la función de iteración, como así también la aproximación inicial, x_0.

La segunda de las condiciones, se obtiene a partir de un análisis:

Sea la iteración $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ la cual se crea para resolver una ecuación no lineal, cuya solucíon sea $x_{solucion}$ Entonces, a podemos escribir, restando a ambos miembros:

$$x_{k+1} - x_{solucion} = \varphi(x_k) - x_{solucion}$$

Llamando ε_ℓ a la diferencia entre el valor aproximado en el paso $\ell-$ésimo con la solución, tenemos $\varepsilon_{k+1} = \varphi(x_k) - x_{solucion}$. Si la función de iteración es derivable con continuidad en un conjunto que contenga a x_0 y a todos los iterados, podemos escribir (en virtud del Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial)

$$\varepsilon_{k+1} = \left[\varphi(x_{solucion}) + \varphi'(\xi)\,(x_k - x_{solucion})\right] - x_{solucion}$$

Como $x_{solucion} = \varphi(x_{solucion})$ tenemos

$$\varepsilon_{k+1} = \varphi'(\xi)\,(x_k - x_{solucion}) = \varphi'(\xi)\,\varepsilon_k$$

Si la derivada de la iteración tiene una cota en el conjunto, $|\varphi'| \leq M$ podemos escribir

$$|\varepsilon_{k+1}| = |\varphi'(\xi)|\,|\varepsilon_k| \leq M|\varepsilon_k|$$

Aplicando este resultado, tendremos

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq M|\varepsilon_k| \leq M^2|\varepsilon_{k-1}| \leq M^3|\varepsilon_{k-2}| \leq \cdots \leq M^{k+1}|\varepsilon_0|$$

donde ε_0 es el error inicial. Notemos que si $M < 1$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} |\varepsilon_{k+1}| \leq \lim_{k\to\infty} M^{k+1}|\varepsilon_0| = 0$$

Lo que implica que, independientemente del error cometido en la primera aproximación, el error tiende a cero. Es decir, converge.

Apliquemos ahora estas ideas a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

2 Método de Picard

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden con condición inicial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

donde $f(x,t) : |x - x_0| \leq a \times |t - t_0| \leq T \to \mathcal{R}$ en principio, continua en la región.

La idea es establecer un proceso iterativo el cual tienda a la solución del PVI.

El primer paso, será hacer un "despeje" para la función solución. Notemos que si integramos entre t_0 y t tenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt} &= \int_{t_0}^{t} f(x(t'),t')\,dt' \\ x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^{t} f(x(t'),t')\,dt' \end{aligned}$$

Entonces, de manera *naïf* obtenemos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(t'),t')\,dt'$$

Si bien esto no nos resuelve el problema, nos permite establecer la sucesión:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= x_0 \\
x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_0(t'), t')\, dt' = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_0, t')\, dt' \\
x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_1(t'), t')\, dt' \\
\vdots &= \vdots \\
x_{\ell+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_\ell(t'), t')\, dt' \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

A los efectos de ver como funciona, consideremos el ejemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x \\
x(0) &= 1
\end{aligned}$$

De manera elemental podemos obtener la solución que resulta $x(t) = e^t$. Calculemos las diferentes soluciones iteradas:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= 1 \\
x_1(t) &= 1 + \int_0^t f(x_0(t'), t')\, dt' = 1 + \int_0^t 1\, dt' = 1 + t \\
x_2(t) &= x_0 + \int_0^t f(x_1(t'), t')\, dt' = 1 + \int_0^t [1 + t] = 1 + t + \frac{t^2}{2} \\
x_3(t) &= x_0 + \int_0^t f(x_1(t'), t')\, dt' = 1 + \int_0^t \left[1 + t + \frac{t^2}{2}\right] = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \\
\vdots &= \vdots \\
x_\ell(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(x_\ell(t'), t')\, dt' = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^\ell}{\ell!} \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Podemos notar que la $\ell-$ésima función iterada es la suma parcial de la serie de la exponencial, por lo que es de esperar que tomando límite

$$\lim_{\ell \to \infty} x_\ell(t) = \lim_{\ell \to \infty} \sum_{j=0}^{\ell} \frac{t^j}{j!} = e^t$$

Ya viendo como funciona el esquema iterativo, debemos ahora estudiar la factibilidad de calcular toda la iteración y estudiar la convergencia. Es trivial demostrar que una función que satisface

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t')\, dt'$$

es solución de la ecuación diferencial. Por tal motivo, concentrémonos en aspectos que tengan que ver con la convergencia.

2.1 Continuidad de las funciones iteradas

El primer paso en el estudio de la convergencia es la posibilidad de obtener las sucesivas funciones iteradas, esto es, debemos poder efectuar la integración

$$\int_{t_0}^{t} f(x_\ell(t'), t')\, dt'$$

para ello, debemos garantizarnos que cada función $x_\ell(t)$ sea continua.

Veamos que todas las funciones iteradas son continuas en el intervalo $|t-t_0| \leq \min\{T, \frac{a}{M}\}$, donde M es el máximo de la función f en la región de definición (que como es un intervalo cerrado y acotado, tendrá su máximo absoluto). Veamos: Para la primera función iterada, tendremos

$$|x_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_0(t'), t')|\, dt' \leq M\, |t - t_0| \leq a$$

esto indica que $x_1(t)$ yace sobre el dominio de definición de f, por lo que podemos integrar para obtener la próxima iteración.

Además, notemos que para cualquier función iterada, $x_\ell(t_0) = x_0$, por lo que, a partir del resultado anterior tenemos que

$$|x_1(t) - x_0| = |x_1(t) - x_1(t_0)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_0(t'), t')|\, dt' \leq M\, |t - t_0| < \varepsilon \qquad si \quad |t - t_0| < \delta$$

Entonces, $x_1(t)$ es una función continua. Inductivamente, podemos obtener que

$$|x_\ell(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_{\ell-1}(t'), t')|\, dt' \leq M\, |t - t_0| \leq a$$

lo que permite obtener la siguiente integral y a la vez nos garantiza la continuidad.

2.2 Condición de Lipschitz

En orden de estudiar la convergencia, vamos a definir una propiedad necesaria para garantizar la convergencia del método.

Definición. Condición de Lipschitz. *Dada una función $f(x,t)$, decimos que satisface la condición de Lipschitiz si existe una constante positiva L tal que satisface*

$$|f(x_2, t) - f(x_1, t)| \leq L\, |x_2 - x_1|$$

Observación: En este caso, la condición se establece en la primera de las variables. En algunos textos se establece en la primera. Lo importante, en el contexto de las ecuaciones diferenciales, es definirla en la variable que depende de la variable independiente. Por ejemplo, en algunos textos, se define la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ se pedirá la condición de Lipschitz en la segunda variable, ya que la variable independiente es x, la primera.

Una condición suficiente para que una función sea Lipschitz es que su derivada parcial sea continua, veamos. Si la derivada parcial es continua, podemos escribir

$$|f(x_2, t) - f(x_1, t)| \leq \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, t) \right| dx^* \leq L\, |x_2 - x_1|$$

donde L es una cota para la derivada parcial.

2.3 Convegencia de la Sucesión

Con las definiciones previas, supongamos que la función que define el PVI, $f(x,t)$ es de Lipschitz, además de las demás propiedades pedidas en las secciones anteriores.

Ya habíamos demostrado que $|x_1(t)-x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_0(t'),t')|\,dt' \leq M\,|t-t_0|$ Ahora, calculemos $|x_2(t)-x_1(t)|$. Tenemos

$$x_2(t)-x_1(t)=\int_{t_0}^{t}\left[f(x_1(t'),t')-f(x_0(t'),t')\right]\,dt'$$

Además, como es de Lipschitz, podemos acotar

$$|x_2(t)-x_1(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_1(t'),t')-f(x_0(t'),t')|\,dt' \leq L\,|x_1(t)-x_0(t)| \leq L\,M\int_{t_0}^{t}|t-t_0|\,dt' \leq L\,M\,\frac{|t-t_0|^2}{2}$$

De manera análoga podemos obtener:

$$\begin{aligned}
|x_2(t)-x_1(t)| &\leq L\,M\,\frac{|t-t_0|^2}{2}=\frac{L}{M}\,\frac{(M|t-t_0|)^2}{2}\leq\frac{L}{M}\,\frac{M^2\alpha^2}{2}\\
|x_3(t)-x_2(t)| &\leq L\,M^2\,\frac{|t-t_0|^3}{3!}=\frac{L}{M}\,\frac{(M|t-t_0|)^3}{3!}\leq\frac{L}{M}\,\frac{M^3\alpha^3}{3!}\\
|x_4(t)-x_3(t)| &\leq L\,M^3\,\frac{|t-t_0|^4}{4!}=\frac{L}{M}\,\frac{(M|t-t_0|)^3}{4!}\leq\frac{L}{M}\,\frac{M^4\alpha^4}{4!}\\
\vdots &\leq \vdots
\end{aligned}$$

(recordemos que $|t-t_0|\leq\alpha=\min\{T,\frac{a}{M}\}$) De manera inductiva, podemos llegar a

$$|x_\ell(t)-x_{\ell-1}(t)| \leq \frac{L}{M}\,\frac{(M\,\alpha)^\ell}{\ell!}$$

Sea $x(t)=\lim_{\ell\to\infty}x_\ell(t)$ y calculemos $|x(t)-x_\ell(t)|$

Primero notemos que podemos escribir

$$x_\ell(t)=[x_1(t)-x_0(t)]+[x_2(t)-x_1(t)]+\cdots+[x_{\ell-1}(t)-x_{\ell-2}(t)]+[x_\ell(t)-x_{\ell-1}(t)]\;+x_0(t)$$

Simplificando,

$$x_\ell(t)=x_0+\sum_{j=0}^{\ell}[x_j(t)-x_{j-1}(t)]$$

y, por definición,

$$x(t)=x_0+\sum_{j=0}^{\infty}[x_j(t)-x_{j-1}(t)]$$

Entonces, tenemos

$$x(t)-x_\ell(t)=\sum_{j=\ell+1}^{\infty}\,[x_j(t)-x_{j-1}(t)]$$

Calculando el valor absoluto,

$$|x(t)-x_\ell(t)|\leq\sum_{j=\ell+1}^{\infty}|x_j(t)-x_{j-1}(t)|\leq\sum_{j=\ell+1}^{\infty}\frac{L}{M}\,\frac{(M\,\alpha)^j}{j!}$$

Si reescribimos esta sumatoria para que comience con $j = 0$

$$|x(t) - x_\ell(t)| \leq \frac{L}{M}\,\frac{(M\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(M\,\alpha)^j}{j!}$$

Entonces, sumando la serie, tenemos

$$|x(t) - x_\ell(t)| \leq \frac{L}{M}\,\frac{(M\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}e^{M\,\alpha}$$

y como

$$\frac{(M\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \ell \to \infty$$

tenemos,

$$\lim_{\ell\to\infty}|x(t) - x_\ell(t)| = 0$$

es decir, la sucesión converge.

Resta comprobar que efectivamente la función a la cual converge sea solución de la ecuación diferencial, es decir,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t')\,dt'$$

como ya comprobamos que $\lim_{\ell\to\infty} x_\ell(t) = x(t)$ sólo falta demostrar que

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(x_\ell(t'), t')\,dt' = \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t')\,dt'$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{t_0}^{t} f(x(t'), t')\,dt' - \int_{t_0}^{t} f(x_\ell(t'), t')\,dt'\right| &\leq L\int_{t_0}^{t}|x(t') - x_\ell(t')|dt' \\
&\leq \frac{L}{M}\,\frac{(M\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}e^{M\,\alpha}\int_{t_0}^{t} dt' \\
&\leq \frac{L}{M}\,\frac{(M\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}e^{M\,\alpha}\,\alpha
\end{aligned}$$

que tiende a cero cuando ℓ tiende a infinito.

Esto concluye la demostración de la convergencia del Método de Picard.

3 Bibliografía recomendada

[1] Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A. (1968)

[2] Goursat, Edouard. *A Cours D'Analyse Mathématique*, Vol. II, Parte I Ed. Gauthier-Villars, (1902)