Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

I

Soluciones Formales
y
Teorema de Existencia de Cauchy

Octavio Miloni

1 Soluciones Formales. Derivada de Lie

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden con condición inicial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

donde $f(x,t) : U \subset \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ diferenciable en $|x - x_0| < \rho$ y $|t - t_0| < T$.
Por <u>solución formal</u> vamos a entender una solución para el problema representada en una serie de potencias uniformemente convergente

$$x(t) = x(t_0) + \frac{dx}{dt}(t_0)\,(t-t_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}(t_0)\,(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}(t_0)\,(t-t_0)^3 + \cdots$$

Es decir, la serie de Taylor de la función solución. Sabemos que si la serie converge uniformemente, la solución formal es la propia función solución.
Notemos que cada término se puede obtener a partir del propio problema de valor inicial.

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ \frac{dx}{dt}(t_0) &= f(x_0,t_0) \\ \frac{d^2x}{dt^2}(t_0) &= \frac{d}{dt}f(x_0,t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0)\,\frac{dx}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0) + f(x_0,t_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0) \\ \frac{d^3x}{dt^3}(t_0) &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + f\,\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial f}{\partial t} + f\,\frac{\partial f}{\partial x}\right](x_0,t_0) \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Notemos que la derivada temporal $n-$ésima en el punto t_0 de la función $x(t)$ se obtiene a partir de

$$\frac{d^nx}{dt^n}(t_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + f\,\frac{\partial f}{\partial x}\right]^{n-1}[f]_{x_0,t_0}$$

A partir de este problema de valor inicial, podemos entonces definir en cada punto (x_0,t_0) el operador denominado <u>*derivada de Lie*</u> definido a partir de

$$\begin{aligned} D_f^0[g] &= g(x_0,t_0) \\ D_f^1[g] &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + f\,\frac{\partial}{\partial x}\right][g]_{(x_0,t_0)} \\ D_f^\ell[g] &= D\left[D_f^{\ell-1}\right][g] \end{aligned}$$

Dado el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

la derivada de Lie de una función g es la derivada total de g sobre la curva solución:

$$D_f\,[g] = \frac{\partial g}{\partial t} + f\,\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dg}{dt}(x_0, t_0)$$

Ejercicio. Comprobar que la derivada de Lie satisface

$D_f[g_1 + \lambda\, g_2] = D_f[g_1] + \lambda\, D_f[g_2]$

$D_f[g_1\, g_2] = D_f[g_1]\, g_2 + g_1\, D_f[g_2]$

Con estas definiciones, la solución formal del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

se puede escribir

$$x(t) = x_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} D_f^{\ell}[f](x_0, t_0)\,\frac{(t-t_0)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}$$

Ejemplo. Hallar la solución formal del problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = 2\,t\,x, \qquad x(0) = 1$$

Calculemos las sucesivas derivadas de Lie

$$\begin{aligned} D_f^0[f] &= 2\,t\,x \\ D_f^1[f] &= 2\,D_f[t]\,x + 2\,t\,D_f[x] = 2x + 2\,t\,f \\ D_f^2[f] &= 2D_f[x] + 2\,D_f[t]\,f + 2\,tD_f[f] = 4\,f + 2\,tD_f[f] \\ D_f^3[f] &= 4\,D_f[f] + 2D_f[t]D_f[f] + 2\,t\,D_f^2[f] = 6\,D_f[f] + 2\,t\,D_f^2[f] \\ \vdots &= \vdots \\ D_f^{\ell}[f] &= 2\,\ell\,D_f^{\ell-2}[f] + 2\,t\,D_f^{\ell-1}[f] \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Además, al evaluar las derivadas de Lie en $t=0$ y $x=1$ tenemos

$$
\begin{array}{rcl}
D_f^0[f](1,0) & = & 0 \\
D_f^1[f](1,0) & = & 2 \\
D_f^2[f](1,0) & = & 0 \\
D_f^3[f](1,0) & = & 2\cdot 3\cdot 2 = 2^2\, 3\cdot 1 \\
D_f^4[f](1,0) & = & 0 \\
D_f^5[f](1,0) & = & 2\cdot 5\cdot D_f^3[f](1,0) = 2^3\cdot 5\cdot 3\cdot 1 \\
D_f^6[f](1,0) & = & 0 \\
D_f^7[f](1,0) & = & 2\cdot 7\cdot D_f^5[f](1,0) = 2^4\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1 \\
D_f^8[f](1,0) & = & 0 \\
D_f^9[f](1,0) & = & 2\cdot 9\cdot D_f^7[f](1,0) = 2^5\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1 \\
\vdots & = & \vdots \\
D_f^{2\ell-1}[f] & = & 2^\ell(2\ell-1)!! \\
\vdots & = & \vdots
\end{array}
$$

Sustituyendo en la serie formal, tenemos:

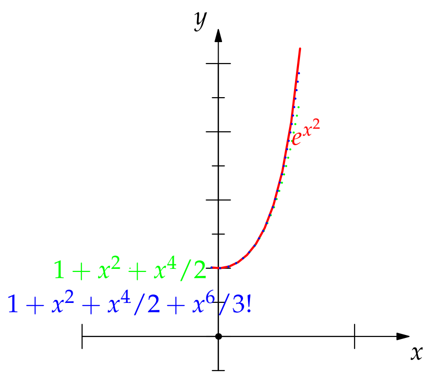
$$x(t) = 1 \,+\, t^2 + \frac{1}{2!}\,t^4 \,+\, \frac{1}{3!}\,t^6 \,+\, \frac{1}{4!}\,t^8 \,+\, \cdots$$

Notemos que la serie es la de la función exponencial

$$x(t) = e^{t^2}$$

Es importante señalar que no siempre es posible encontrar una recurrencia para las sucesivas derivadas de Lie, sin embargo, dependiendo de la forma de la función f podemos escribir siempre $D_f^\ell[f]$ como una función de $D_f^{\ell-1}[f]$ y $D_f^{\ell-2}[f]$ por lo que al tener calculada numericamente f y $D_f[f]$ en el punto inicial, podemos obtener todas las sucesivas derivadas de Lie, que en definitiva son los coeficientes de la serie formal.

Este método permite obtener desarrollos aproximados cuando lo que nos interesa es una aproximación polinómica de la función solución.



Este gráfico muestra la solución e^{x^2} en rojo, y dos aproximaciones. Podemos apreciar que aún con pocos términos, las aproximaciones son bastante buenas.

2 Convergencia de las series formales

Vamos a estudiar la convergencia uniforme de las series formales construídas de la forma que vimos en la sección anterior. Claramente, si podemos demostrar que las series convergen uniformemente, podemos afirmar que la solución del problema de valor inicial existe. Esto es, demostraremos la existencia de la solución.

2.1 Principio: Método de la Mayorante

Dado el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

donde vamos a suponer que la función $f(x,t)$ es analítica en los dominios complejos

$$\mathcal{D}' : |x - x_0| < \rho' \times |t - t_0| < T'$$

Definición. Función mayorante. *Dada una función analítica $f(z)$ en un determinado dominio $\mathcal{D}'$. Decimos que la función $g(z)$ es una función mayorante de f en $\mathcal{D}'$ si*

$$|f(z)| \leq |g(z)|, \qquad \textit{en } \mathcal{D}'$$

Observación: Es claro que en el conjunto de los complejos no hay un orden usual, es decir, no tiene sentido plantear $z_1 \leq z_2$. Ahora, el orden en módulo si, ya que es un número real.

Principio de la Mayorante. Dado el problema de valor inicial,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

donde la función f es analítica en el dominio complejo (en las dos variables complejas x y t) $\mathcal{D}'$ y además admite una función mayorante, $M(x,t)$, es decir

$$|f(x,t)| \leq |M(x,t)|$$

En un determinado dominio.
Ahora supongamos que tenemos una cota uniforme para la función $|f(x,t)| \leq M(x,t)$. Con esta función *mayorante* estudiemos el problema de valor inicial auxiliar

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= M(\xi,t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

El *principio de la mayorante* establece que si problema de valor inicial auxiliar admite una solución analítica, entonces el problema inicial también tendrá solución analítica, en el dominio de acotación. Esto se cumple debido a que cada término de la serie formal que determina la solución del problema original estará acotado uniformemente por cada término de los términos que conforman la solución formal de la solución del problema auxiliar.

Además, la región de convergencia estará garantizada por la región de convergencia del problema auxiliar.

Construcción de la función mayorante

Dada la analiticidad de la función $f(x,t)$ en $\mathcal{D}'$ podemos representar la función como una serie de Taylor

$$f(x,t) = \sum_{\ell_x,\ell_t=0}^{\infty} \frac{1}{\ell_x!\ \ell_t!}\ \frac{\partial^{\ell_x+\ell_t}}{\partial x^{\ell_x}\partial t^{\ell_t}} f(x_0,t_0)(x-x_0)^{\ell_x}\,(t-t_0)^{\ell_t}$$

Para la expresión de las derivadas, podemos aplicar la fórmula de la integral de Cauchy

$$\frac{1}{\ell_x!\ \ell_t!}\ \frac{\partial^{\ell_x+\ell_t}}{\partial x^{\ell_x}\partial t^{\ell_t}} f(x_0,t_0) = \frac{1}{(2\pi\, i)^2}\oint_{\gamma_x}\oint_{\gamma_t} \frac{f(x,t)}{(x-x_0)^{\ell_x+1}(t-t_0)^{\ell_t+1}}dx\,dt$$

donde las curvas $\gamma_x : |x-x_0| = \rho < \rho'$ y $\gamma_t : |t-t_0| = T < T'$

El valor absoluto de las derivadas será

$$\left|\frac{1}{\ell_x!\ \ell_t!}\ \frac{\partial^{\ell_x+\ell_t}}{\partial x^{\ell_x}\partial t^{\ell_t}} f(x_0,t_0)\right| \le \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(x,t)|}{|(x-x_0)^{\ell_x+1}|\,|(t-t_0)^{\ell_t+1}|}|dx|\,|dt|$$

Las parametrizaciones:

$$x = x_0 + \rho\, e^{i\theta_x}, \quad \to \quad dx = i\rho e^{i\theta_x}\, d\theta_x \quad \to |dx| = \rho\, d\theta_x$$

$$t = t_0 + T\, e^{i\theta_t}, \quad \to \quad dt = i\, T e^{i\theta_t}\, d\theta_t \quad \to |dt| = T\, d\theta_t$$

Llamando M al máximo de la función en las regiones de integración, tenemos

$$\left|\frac{1}{\ell_x!\ \ell_t!}\ \frac{\partial^{\ell_x+\ell_t}}{\partial x^{\ell_x}\partial t^{\ell_t}} f(x_0,t_0)\right| \le \frac{M}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^{\ell_x+1}T^{\ell_t+1}}\rho d\theta_x\, T d\theta_t$$

Entonces,

$$\left|\frac{1}{\ell_x!\ \ell_t!}\ \frac{\partial^{\ell_x+\ell_t}}{\partial x^{\ell_x}\partial t^{\ell_t}} f(x_0,t_0)\right| \le \frac{M}{\rho^{\ell_x}\, T^{\ell_t}}$$

Utilizando estas cotas para las derivadas, tendremos que la función mayorante será

$$M(x,t) = \sum_{\ell_x,\ell_t=0}^{\infty} \frac{M}{\rho^{\ell_x}\, T^{\ell_t}}(x-x_0)^{\ell_x}\,(t-t_0)^{\ell_t}$$

$$M(x,t) = M\sum_{\ell_x,\ell_t=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{\ell_x}}{\rho^{\ell_x}}\ \frac{(t-t_0)^{\ell_t}}{T^{\ell_t}} = M\left\{\sum_{\ell_x}^{\infty}\left[\frac{x-x_0}{\rho}\right]^{\ell_x}\right\}\left\{\sum_{\ell_x}^{\infty}\left[\frac{t-t_0}{T}\right]^{\ell_t}\right\}$$

Lo que está entre llaves, son dos series geométricas, que sumadas resulta *la función mayorante*

$$M(x,t) = \frac{M}{\left[1-\frac{x-x_0}{\rho}\right]\,\left[1-\frac{t-t_0}{T}\right]}$$

convergente para $|x - x_0| < \rho$ y $|t - t_0| < T$

Integración del sistema auxiliar

Consideremos ahora el sistema auxiliar

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{M}{\left[1 - \frac{\xi - x_0}{\rho}\right]\left[1 - \frac{t-t_0}{T}\right]} \\ \xi(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver de manera elemental ya que es a variables separables,

$$\int_{x_0}^{\xi} \left[1 - \frac{\xi^* - x_0}{\rho}\right] d\xi^* = \int_{t_0}^{t} \frac{M}{\left[1 - \frac{t^*-t_0}{T}\right]} dt^*$$

lo que resulta

$$(\xi - x_0) - \frac{(\xi - x_0)^2}{2\rho} = -M\,T \ln\left[1 - \frac{t - t_0}{T}\right]$$

Que podemos obtener la función $\xi(t)$ resolviendo la ecuación cuadrática

$$\xi - x_0 = \rho\left[1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{M\,T}{\rho}\ln\left[1 - \frac{t - t_0}{T}\right]}\right]$$

La ambigüedad de signo se resuelve por el negativo, ya que la condición inicial es $\xi(t_0) = x_0$, entonces la solución es

$$\xi(t) = x_0 + \rho\left[1 - \sqrt{1 + 2\frac{M\,T}{\rho}\ln\left[1 - \frac{t - t_0}{T}\right]}\right]$$

donde el dominio de analiticidad estará dado por el mínimo entre $|t - t_0| < T$ y

$$1 + 2\frac{M\,T}{\rho}\ln\left[1 - \frac{t - t_0}{T}\right] > 0$$

o bien

$$1 - \frac{t - t_0}{T} > e^{-\frac{\rho}{2\,M\,T}}$$

con lo que podemos obtener el intervalo en t,

$$t - t_0 < T\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2\,M\,T}}\right).$$

Este resultado es conocido como *Teorema de Existencia de Cauchy*.

Si hacemos un desarrollo de la exponencial, podemos escribir

$$t - t_0 < T\left[1 - \left(1 - \frac{\rho}{2\,M\,T} + \frac{\rho^2}{4\,M^2\,T^2} + \cdots\right)\right] = \frac{\rho}{2\,M} - \frac{\rho^2}{4\,M^2\,T} + \cdots$$

que, para le caso en que la función f no depende explícitamente del tiempo, tendremos que la función solución es analítica en

$$t - t_0 < \frac{\rho}{2\,M}$$

Este método asume analiticidad de las funciones, lo que es mucho pedir. Más adelante veremos un método que garantiza la existencia de solución sin necesidad de imponer la analiticidad.

Aún siendo particular, este método nos proporciona la construcción de las series formales, que en muchos casos es lo primero que buscamos, tanto para ver la solución, como para aproximaciones en desarrollos asintóticos a determinado orden.

Bibliografía recomendada

[1] Moulton, Forest R. *Differential Equations*, Ed. Dover (1958)

[2] Goursat, Edouard. *A Cours D'Analyse Mathématique*, Vol. II, Parte I Ed. Gauthier-Villars, (1902)

[3] Forsyth, Andrew R. *Theory of Differential Equations*, Vol. II, Parte II Ed. Cambridge Academic Press (1900)